

Math. P.

244

dp

Math. P.

244 dpr

Isenkrake



DAS
VERFAHREN DER FUNKTIONSWIEDERHOLUNG,

SEINE
GEOMETRISCHE VERANSCHAULICHUNG

UND
ALGEBRAISCHE ANWENDUNG

VON
DR. C. ISENKRAHE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.



ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Einleitung.

Das Verfahren der Funktionswiederholung, welches unter dem Namen Methode oder Theorie der iterierten Funktionen in der neueren Mathematik mehrfach zum Gegenstande besonderer Untersuchungen gemacht worden ist, hat schon in der älteren Mathematik manche zerstreute Vorläufer, z. B. die Archimedische Auswertung der Zahl π , die sogenannte regula falsi, die Newton'sche Näherungsmethode, die Benutzung der Kettenbrüche zur Darstellung irrationaler Größen, die Gauss'sche Lösung des Kepler'schen Problems u. s. w. Der Gedanke aber, jene vereinzelter, unter sich bis dahin in keiner Weise zusammenhängenden Gebiete einem gemeinsamen Gesichtspunkte unterzuordnen und die für alle geltenden Gesetze aufzustellen, wurde erst in neuerer Zeit klar ausgesprochen und seine Durchführung unternommen. Dabei trat ein, was in solchen Fällen in der Regel geschieht. Kaum war jener Gesichtspunkt gefunden, so erweiterte sich von ihm aus der Blick. Man gewann Einsicht in Zusammenhänge, die früher versteckt gewesen, und überschaute Bereiche, deren Zugang man nicht gekannt hatte. —

Jener gemeinsame Grundgedanke nun ist sehr einfach und läßt sich folgendermaßen leicht entwickeln.

Es sei z_0 irgend eine reelle oder komplexe Zahl, und das Zeichen $f()$ bedeute den Inbegriff einer Reihe von Rechnungsoperationen, welche mit der Zahl z_0 vorzunehmen seien. Bezeichnen wir dann das, was nach Vornahme all dieser Rechnungen herauskommt, mit z_1 , so haben wir die Gleichung:

$$z_1 = f(z_0).$$

Wenn jetzt mit z_1 genau dieselben Rechnungen, wie vorhin

mit z_0 , vorgenommen werden, und das hierbei sich ergebende Resultat z_2 heißt, so ist zu schreiben:

$$z_2 = f(z_1) = f(f(z_0)).$$

Auf dieselbe Weise also auch:

$$z_3 = f(z_2) = f(f(z_1)) = f(f(f(z_0))) \text{ u. s. w.}$$

Zur Abkürzung pflegt man die Anzahl der hintereinander stehenden Funktionszeichen $f()$ durch einen Zeiger anzugeben und also zu schreiben:

$$z_3 = f(z_2) = f_2(z_1) = f_3(z_0).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu der allgemeinen Gleichung:

$$\begin{aligned} z_{m+n} = f(z_{m+n-1}) = \cdots f_m(z_n) = f_n(z_m) = \cdots f_{m+n-1}(z_1) \\ = f_{m+n}(z_0). \end{aligned}$$

Hiermit ist das Verfahren der Iteration oder Funktionswiederholung in seiner einfachsten Form gekennzeichnet.

Jeder aus der mit $f()$ bezeichneten Rechnung hervorgehende Wert z_n wird dabei für sich allein und so, wie er ist, der gleichen Rechnung wieder unterworfen und liefert dann den Wert z_{n+1} u. s. w.

Es kann nun aber auch Gründe geben, einzelne Werte z_n , bevor sie in die neue Rechnung eintreten, auf eine passende Weise erst zu verändern, ferner kann man außer z_n auch noch den früher erhaltenen Wert z_{n-1} , vielleicht noch z_{n-2} etc. mitbenutzen, um z_{n+1} zu ermitteln.

Desgleichen ist nicht ausgeschlossen, die Funktion $f()$ selbst zur Erreichung bestimmter Zwecke umzuformen.

Wenn das alles nach klaren Gesetzen geschieht, so fällt auch ein solches Verfahren unter den allgemeinen Gesichtspunkt der Funktionswiederholung. Man könnte es im Gegensatz zu der obigen einfachen und unmittelbaren Iteration als eine mittelbare, zusammengesetzte, angepaßte etc. bezeichnen.

Nun aber die Frage: Wohin führt überhaupt ein solches Verfahren, mag es einfach oder zusammengesetzt sein? Wozu dient die Funktionswiederholung?

Hierauf ist zu antworten: Entweder nähern sich die aufeinander folgenden Rechnungsergebnisse z_n, z_{n+1}, z_{n+2} etc.

ohne Ende einer bestimmten Grenze, oder sie kehren wieder und wiederholen sich mit einer feststehenden Regelmäßigkeit, oder sie thun weder das eine noch das andere.

Im ersten Falle erkennt man leicht folgendes: Wenn die Werte z_n und z_{n+1} sich einer Grenze nähern, und das Verfahren soweit gediehen ist, daß z_n und z_{n+1} sich von diesem Grenzwerte und also auch von einander äusserst wenig mehr unterscheiden, so geht die Gleichung:

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

allmählich über in die Gleichung:

$$z = f(z).$$

Also ergibt sich einerseits, daß jene Grenze eine Zahl ist, welche diese Gleichung befriedigt, und andererseits, daß die Iteration ein Mittel ist, diese Wurzel der Gleichung mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen.

Welch außerordentliche Tragweite dieses Ergebnis hat, zeigt schon der Umstand, daß es immer gültig bleibt, mag $f(z)$ eine ganze oder gebrochene algebraische Funktion von beliebig hohem Grade, mag es eine rationale oder irrationale oder auch eine transcendente Funktion der reellen oder komplexen Zahl z sein.

Der ganze Wert der Sache aber hängt, wie man sieht, ab von der Grundfrage, ob die Grössen z_n , z_{n+1} etc. sich einer Grenze nähern oder nicht, mit anderen Worten, ob die Iteration konvergent ist oder nicht. — Früher stand, um diese Frage in den verstreuten Einzelfällen zu entscheiden, kein weiteres Mittel zu Gebote, als jedesmal Einzeluntersuchungen anzustellen, welche sich auf die besondere Natur der Funktion $f(z)$ stützen mußten, da ein allgemeines Gesetz nicht vorhanden war. Bei der Gelegenheit z. B., als ich in mehreren früheren Abhandlungen über die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale iterierte Funktionen zur Verwendung brachte, war ich auf solche Einzelarbeit bei den bezüglichlichen Konvergenzbeweisen allein angewiesen. Aber im weiteren Verlaufe der damit begonnenen Untersuchungen ergaben sich mir die grundlegenden allgemeinen Gesetze, welche ich darauf in

den „Mathematischen Annalen“ 1888 Bd. XXXI S. 313 u. ff. mit ganz kurzen Andeutungen des Beweises veröffentlichte.

Von diesen Sätzen führe ich zum Zwecke nachheriger Benutzung hier folgende an:

I. „Die Iteration von $f(x)$ kann nur dann gegen einen festen Wert ξ_α konvergieren, wenn der analytische Modulus von $f'(\xi_\alpha)$ kleiner als die Einheit ist.“

II. „Wenn die Iteration der Funktion $f(x)$ nach einem Werte ξ_α konvergiert, so ist diese Konvergenz stets um so rascher, je kleiner der Modulus von $f'(\xi_\alpha)$ ist, und um so langsamer, je näher dieser Modulus an die Einheit heranrückt.“

III. „Im Besonderen ist für das Gebiet der reellen Größen der Satz bemerkenswert, daß die Iteration sich der Grenze ξ_α immer nur von einer Seite nähert, wenn $f'(\xi_\alpha)$ positiv ist, hingegen um den Wert ξ_α herumpendelt, wenn $f'(\xi_\alpha)$ negativ ist.“

IV. „Wenn man in einer Gleichung $F(x) = 0$ die Größe x an beliebig vielen Stellen, wo sie vorkommt, mit y vertauschen und so eine zweite Gleichung $F(x, y) = 0$ bilden kann, aus welcher sich sowohl x als y isolieren läßt, etwa in der Form $x = g(y)$, $y = h(x)$, dann können die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ sämtlich durch konvergente Iteration, und zwar teils der Funktion $g(y)$, teils der Funktion $h(x)$ dargestellt werden.“

Alle diese Sätze nun finde ich in den eben veröffentlichten „Vorlesungen über Algebra“ von Prof. Netto¹⁾ wieder. Die dort beigefügten Beweise gehören dem Gedankenkreise an, auf welchen in meiner oben genannten Abhandlung Bezug genommen war. In jener selben Abhandlung aber wies ich auch schon auf ein ganz anderes Gebiet hin, aus welchem sich Ableitungen für dieselben und für noch weitere Sätze hernehmen ließen und behielt mir die Mitteilung der diesbezüglichen Entwicklungen ausdrücklich für eine spätere Gelegenheit vor (l. c. S. 317).

1) Dr. Eugen Netto, Vorlesungen über Algebra. Erster Band. Leipzig 1896.

Indem ich die Ausführung dieses Vorhabens nunmehr beginne, sollen zunächst in den folgenden Kapiteln neue Ableitungen für die Grundgesetze der Theorie von den iterierten Funktionen gegeben und im Anschluß daran ausreichende Mittel vorgeführt werden, um die im Satze I bezeichnete Konvergenzgrenze in jedem Falle wegzuräumen. Dann soll eine Reihe von Anwendungen des Iterationsverfahrens auf Fragen und Aufgaben der Algebra folgen. Als solche sind ausgewählt worden die Bruch-, Potenz- und Wurzelketten, die zur Lösung aller trinomischen Gleichungen ausreichen und nur, wenn sie des Schlußgliedes ermangeln, eine Konvergenzlücke aufweisen, welche genau abgegrenzt werden soll. — Ferner die Aufgabe, eine gegebene Funktion durch Wiederholung ihrer selbst umzukehren, nebst ihrer Anwendung auf Kreisfunktionen, auf die Exponentialfunktion und den Logarithmus. Dabei ergibt sich von selbst die Darstellung der Konstanten π und e , wie auch jeder beliebigen reellen Zahl als Iterationsgrenze.

Zum Schluß soll die Lösung der Aufgabe: Alle reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung n ten Grades mit Hülfe von Gleichungen niedrigeren Grades zu finden, durch das Verfahren der Funktionswiederholung geleistet und gezeigt werden, wie diese Wurzeln von sicher und eindeutig bestimmten Anfangswerten aus durch zuverlässig konvergente Iteration mit beliebiger Genauigkeit dargestellt, und stets auch der Grad der erreichten Genauigkeit bestimmt werden kann. —

Eine tiefer gehende Erörterung des ganzen Problems, welche auf die Theorie der komplexen Zahlen zurückgreift, mag dann immer noch, weil in der Beilage eines Schulprogramms¹⁾ der gebotene Raum dafür nicht ausreicht, für eine weitere Arbeit aufgespart bleiben.

1) Als solche ist die vorliegende Schrift abgefaßt und dem Jahresbericht des Kaiser-Wilhelm-Gymnasiums in Trier zugefügt worden.

I.

Geometrische Deutung der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

§ 1. Solange in der Funktion $F(x)$ die GröÙe x als veränderlich betrachtet wird, ist auch der Wert der ersteren veränderlich und von dem der letzteren abhängig, und wenn einerseits in $F(x)$ keine komplexen Konstanten vorkommen und andererseits für x keine komplexen Werte gewählt werden, so kann, wie seit Cartesius üblich, die Beziehung zwischen x und $F(x)$ durch eine Kurve dargestellt, diese auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bezogen und als analytisches Symbol derselben die Gleichung $y = F(x)$ angesehen werden.

Diese Gleichung geht in dem besonderen Falle, wo $y = 0$ ist, über in eine gewöhnliche Gleichung mit einer Unbekannten, und wenn die letztere reelle Wurzeln besitzt, so werden diese Wurzeln geometrisch versinnbildet als Punkte, in denen die eben erwähnte Kurve die X-Achse schneidet. Das ist die hergebrachte Vorstellung.

Allein dieser ganze Gedanke erscheint mir als ein bloßer Einzelfall aus einer Mannigfaltigkeit, die bei einer allgemeineren Veranschaulichungsweise sofort zu Tage tritt. Denn es ist ja gar nicht nötig, daß die Gleichung, um deren Wurzeln es sich handelt, gerade die Form $F(x) = 0$ habe. Gesetzt z. B. $F(x)$ sei eine Potenzreihe, d. h. es liege die Gleichung vor:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0,$$

so kann man die Glieder derselben nach Belieben transponieren, die Koeffizienten spalten, Faktoren absondern, das Ganze dividieren, radizieren u. s. w. — Weil durch alles das die Wurzeln der Gleichung nicht verändert werden, bleibt ja bei aller Mannigfaltigkeit die Einheit gewahrt. Es kommt bloß darauf an, ob auch eine geometrische Mannigfaltigkeit aufzufinden ist, welche die erwähnte algebraische veranschaulicht und genau deckt. Dieses Ziel wird auf folgende einfache Weise erreicht:

Geht die Gleichung $F(x) = 0$ durch irgend welche Rechenoperationen in irgend eine neue Gestalt über, so läßt die letztere sich durch die allgemeine Bezeichnung:

$$f(x) = g(x)$$

ausdrücken, und diese wiederum kann als das Resultat betrachtet werden, welches aus zwei Kurvengleichungen

$$y = f(x) \text{ und } y = g(x)$$

durch Elimination der GröÙe y entsteht.

Hiernach ist unter allen möglichen Umformungen der Gleichung $F(x) = 0$ keine denkbar, die nicht durch ein bestimmtes Kurvenpaar zutreffend veranschaulicht werden könnte. Jede reelle Wurzel wird dann natürlich durch einen Kurvenschnitt dargestellt, aber die Unveränderlichkeit der Wurzeln kennzeichnet sich nicht etwa dadurch, daß die jedesmaligen Kurvenpaare sich sämtlich in genau denselben Punkten schneiden, sondern dadurch, daß die X -Koordinaten (Abscissen) der Schnittpunkte unveränderlich sind.

Hat die gegebene Gleichung n reelle Wurzeln ξ_1, ξ_2 bis ξ_n , legt man diese Wurzelwerte als Punkte auf der X -Achse fest und errichtet Lote daselbst, so sind jene Kurvenschnitte einfach auf diese Lote gebannt, können aber darauf hin und her wandern. Die Gesamtheit dieser Lote ist ihrerseits auch wieder nichts anderes, als die geometrische Darstellung einer einzelnen bestimmten Form, welche die Gleichung $F(x) = 0$ annehmen kann, derjenigen Form nämlich, bei welcher die Funktion $F(x)$ in lineare Faktoren (diese als reell vorausgesetzt) zerlegt erscheint. Denn, sowie die Gleichung $x = a$ eine Gerade darstellt, welche der Y -Achse im Abstände a parallel läuft, stellt die Gleichung:

$$(x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3) \cdots (x - \xi_n) = 0$$

alle eben erwähnten Lote zugleich dar.

§ 2. Bei der späteren Benutzung des Kurvenpaares $y = f(x)$ und $y = g(x)$ werden sich Verschiebungen oder Drehungen und Verbiegungen der Kurven für manche Zwecke als förderlich erweisen. Daher möge zunächst über den Zusammenhang solcher Umformungen mit den Änderungen der zugehörigen Gleichung einiges allgemein Geltende gesagt werden.

Bedeutet A eine reelle Konstante, und bildet man aus der Gleichung $f(x) = g(x)$ die neue:

$$A + f(x) = A + g(x),$$

so sieht man sofort, daß alle Durchschnittspunkte der Kurven, oder, was dasselbe bedeutet, alle Wurzelpunkte der Gleichung in der Richtung der positiven Y -Achse um die Strecke A verschoben werden. Hätte man die Gleichung:

$$A \cdot f(x) = A \cdot g(x)$$

gebildet, so würden die Ordinaten sämtlicher Wurzelpunkte im Verhältnis $1 : A$ vergrößert bez. verkleinert worden sein. Hieraus allein ist schon ersichtlich, daß jeder beliebige Punkt der vorhin beschriebenen Lote auf der X -Achse Schnittpunkt der Kurven werden kann.

Um eine beliebige Potenz seiner Ordinate wird jeder Wurzelpunkt verschoben, wenn wir setzen:

$$f(x) + Ax^p = g(x) + Ax^p.$$

Und so lassen sich die Verschiebungen noch weiter auf die mannigfaltigste Weise verändern; wichtiger aber sind die Drehungen und die damit verbundenen Biegungen.

Man bilde zunächst:

$$f(x) + A \cdot f(x) = A \cdot f(x) + g(x)$$

und dann:

$$f(x) = \frac{1}{1+A} [A \cdot f(x) + g(x)] = h(x).$$

Da hierbei die GröÙe A der freien Wahl anheimgegeben ist, so kann sie dazu dienen, der Kurve $y = h(x)$ an jedem Wurzelpunkte irgend eine gewünschte Richtung zu geben. Sei z. B. α der Winkel, welchen diese Richtung mit der positiven X -Achse bilden soll, so hat man nur zu setzen:

$$h'(x) = \frac{dh(x)}{dx} = \tan \alpha.$$

Sobald hieraus der Koeffizient A bestimmt ist, kann man nach Einsetzung seines Wertes in die Funktion $h(x)$ sicher sein, daß die Kurve $y = h(x)$ überall da, wo sie die Kurve $y = f(x)$ schneidet, die gewünschte Richtung besitzt. Wird die Rechnung ausgeführt und dabei der Kürze wegen f statt $f(x)$, g statt $g(x)$ und h statt $h(x)$ gesetzt, so ergibt sich:

$$h = \frac{\tan \alpha (f - g) + gf' - fg'}{f' - g'}.$$

Dieser Ausdruck ändert sich offenbar in keiner Weise, wenn die Funktionen f und g miteinander vertauscht werden. Daher muß, wenn man die ursprüngliche Gleichung umstellen und daraus bilden wollte:

$$g(x) = \frac{1}{1+A} [A \cdot g(x) + f(x)] = i(x),$$

für diese Funktion i natürlich ganz derselbe Ausdruck, wie eben für h , zum Vorschein kommen.

Die Gleichung $f = g = h$ stellt also unendlich viele Kurven dar, welche durch alle Wurzelpunkte der Gleichung $f = g$ gehen, und von denen die durch die Relation $y = h$ dargestellten an diesen Punkten mit der positiven X-Achse den ganz beliebigen Winkel α bilden.

Zur Bestätigung dessen kann man h wirklich differenzieren und erhält nach einigen Umformungen:

$$h' = \frac{\tan \alpha (f' - g')^2 - (f - g)[f'g'' - g'f'' + \tan \alpha (f'' - g'')]}{(f' - g')^2}.$$

Da aber an allen Wurzelpunkten $f = g$ ist, so ergibt sich dort thatsächlich:

$$h' = \tan \alpha.$$

II.

Brücken. Wurzelachse. Spiegelung.

§ 3. Das allgemeine algebraische Problem, die reellen Wurzeln einer Gleichung von irgend einem passenden Anfangswerte aus durch stete Annäherung mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen, können wir nunmehr in ein geometrisches Gewand kleiden und sagen: es sollen von einem passend gewählten Punkte der Ebene aus solche Wege bestimmt werden, die mit beliebiger Annäherung an die Wurzelpunkte heranzuführen, und denen die Rechnung Schritt vor Schritt nachgehen kann.

Den ersten Anfang zur Erreichung dieses Zieles bildet das Brückenschlagen.

Wir legen die Gleichung:

1) $F(x) = 0$

zu Grunde, nehmen an, dieselbe sei umgebildet worden in die Form:

2) $f(x) = g(x),$

schließen aber den Fall, daß sie dabei zu ihren alten Wurzeln noch neue hinzubekommen hätte, vorläufig aus. Auf diese Weise gelangen wir zu den Kurven:

3) $y = f(x)$ und $y = g(x),$

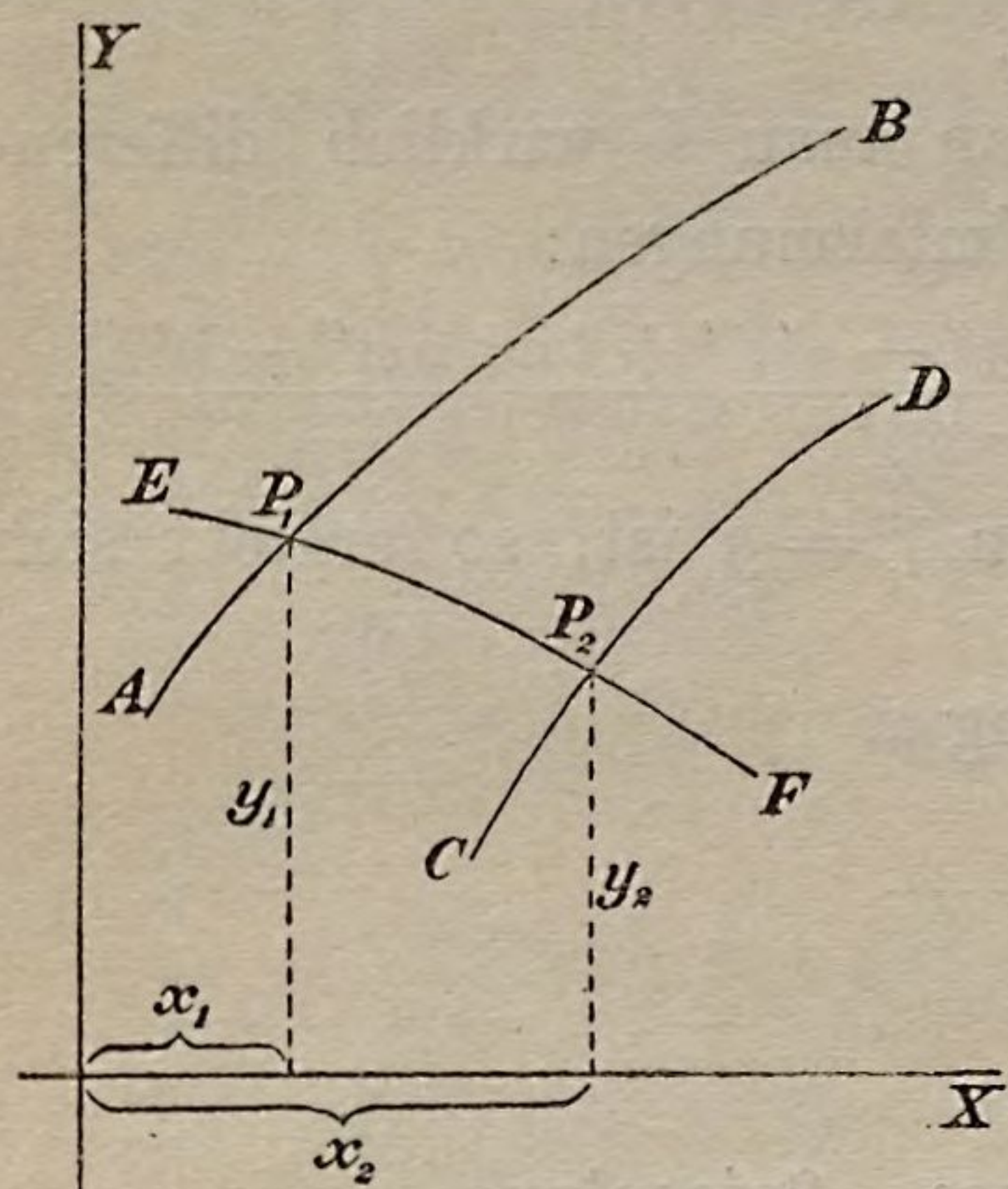
deren Schnittpunkte die reellen Wurzeln von 1) und 2) sind. — Wählen wir jetzt eine reelle Zahl x_1 und berechnen $y_1 = f(x_1)$,

so ist durch x_1 und y_1 ein Punkt P_1 (Fig. 1) auf der Kurve AB , deren Gleichung $y = f(x)$ heißt, festgelegt. Von diesem Punkte aus suchen wir nun eine Brücke hinüber zu schlagen zu der Kurve CD , deren Gleichung $y = g(x)$ heißt, und ziehen daher durch P_1 irgend eine dritte Kurve EF , welche die letztere in dem Punkte P_2 , dessen Koordinaten x_2 und y_2 sind, schneiden möge. Diese dritte Kurve soll die Gleichung $y = k(x)$ haben. — Dann findet statt:

4) $y_1 = f(x_1) = k(x_1)$ und $y_2 = g(x_2) = k(x_2).$

Unter den zahllosen Möglichkeiten für die Konstruktion solcher Brücken nenne ich als Beispiele, die von vornherein Vorteile versprechen, eine durch P_1 gezogene Sehne oder Tangente der Kurve $y = f(x)$; auch der ebendasselbst konstruierte Krümmungskreis ließe sich in Betracht ziehen. Wir werden später darauf zurückkommen, jetzt aber eine andere Brücke wählen, welche den Vorzug hat, die denkbar einfachste zu sein, da sie gar keine besondere Rechnung erfordert. Durch den Punkt P_1 ziehen wir nämlich eine Parallele zur X-Achse

Fig. 1.

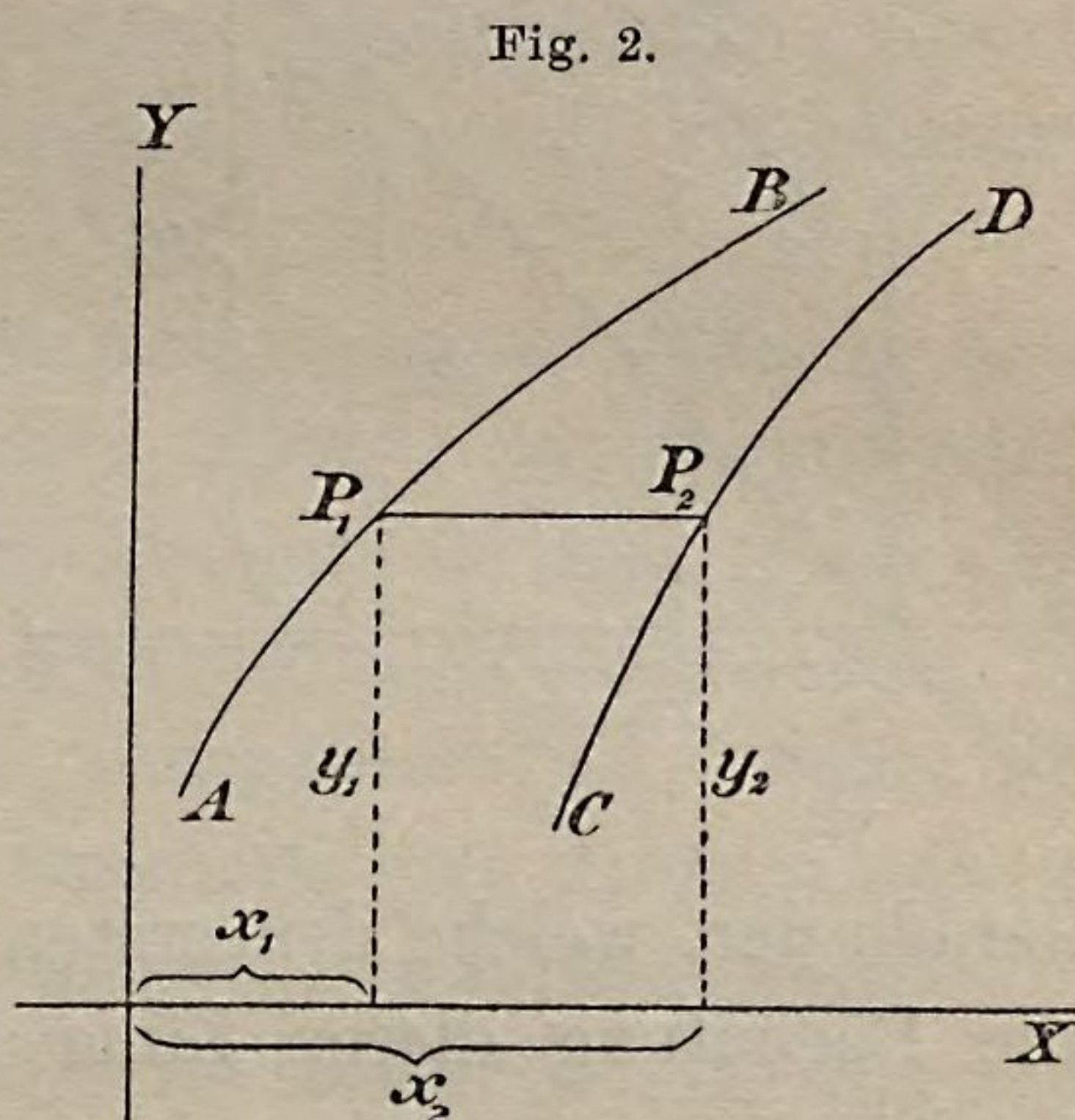


(Fig. 2). Dann geht die Kurvenvergleichung $y = k(x)$ über in die Form $y = y_1$, und die Beziehungen 4) hängen sich einfach aneinander :

$$5) \quad y_1 = f(x_1) = k(x_1) = y_2 = g(x_2) = k(x_2).$$

Somit wäre die erste Brücke fertig. Bevor man es aber unternehmen kann, von dem eben erreichten Punkte P_2 aus eine zweite Brücke zu schlagen — welche natürlich wiederum auf die Kurve AB zurückführen muß — ist offenbar erst x_2 zu bestimmen, also die Gleichung $y_2 = g(x)$ für x aufzulösen.

Aus diesem Umstande wird ersichtlich, daß es schon sofort bei der Umbildung der Gleichung 1) in die Form der Gleichung 2) wesentlich darauf ankommt, die Funktion $g(x)$ zu einer leicht invertierbaren zu machen.



Ist $g(x)$ ein linearer oder quadratischer Ausdruck, oder von der Form x^p , oder auch eine transcendente Funktion, die mit Hilfe von Tabellen leicht invertiert werden kann, so hat die Bestimmung von x_2 keine Schwierigkeit, nur müssen die dabei etwa zu Tage tretenden Mehrdeutigkeiten natürlich einzeln betrachtet werden.

Wenn sodann die Inversion geleistet ist, steht nichts im Wege, von dem Punkte P_2 aus die zweite Brücke zu schlagen. Freilich wird diese nicht wieder als Parallele zur X -Achse gezogen, da man ja nicht auf P_1 zurück, sondern zu einem neuen Punkte P_3 der Kurve AB gelangen will. — Vor dem zweiten Brückenbau wollen wir aber noch eben feststellen, welches die denkbar einfachste Möglichkeit für die Inversion der Funktion $g(x)$ ist. — Setzen wir statt $g(x)$ weiter nichts als x , so ist die Gleichung schon von selber invertiert, und unsere Kette 5) verlängert sich ohne alle Rechnung um ein weiteres Glied, so daß wir haben:

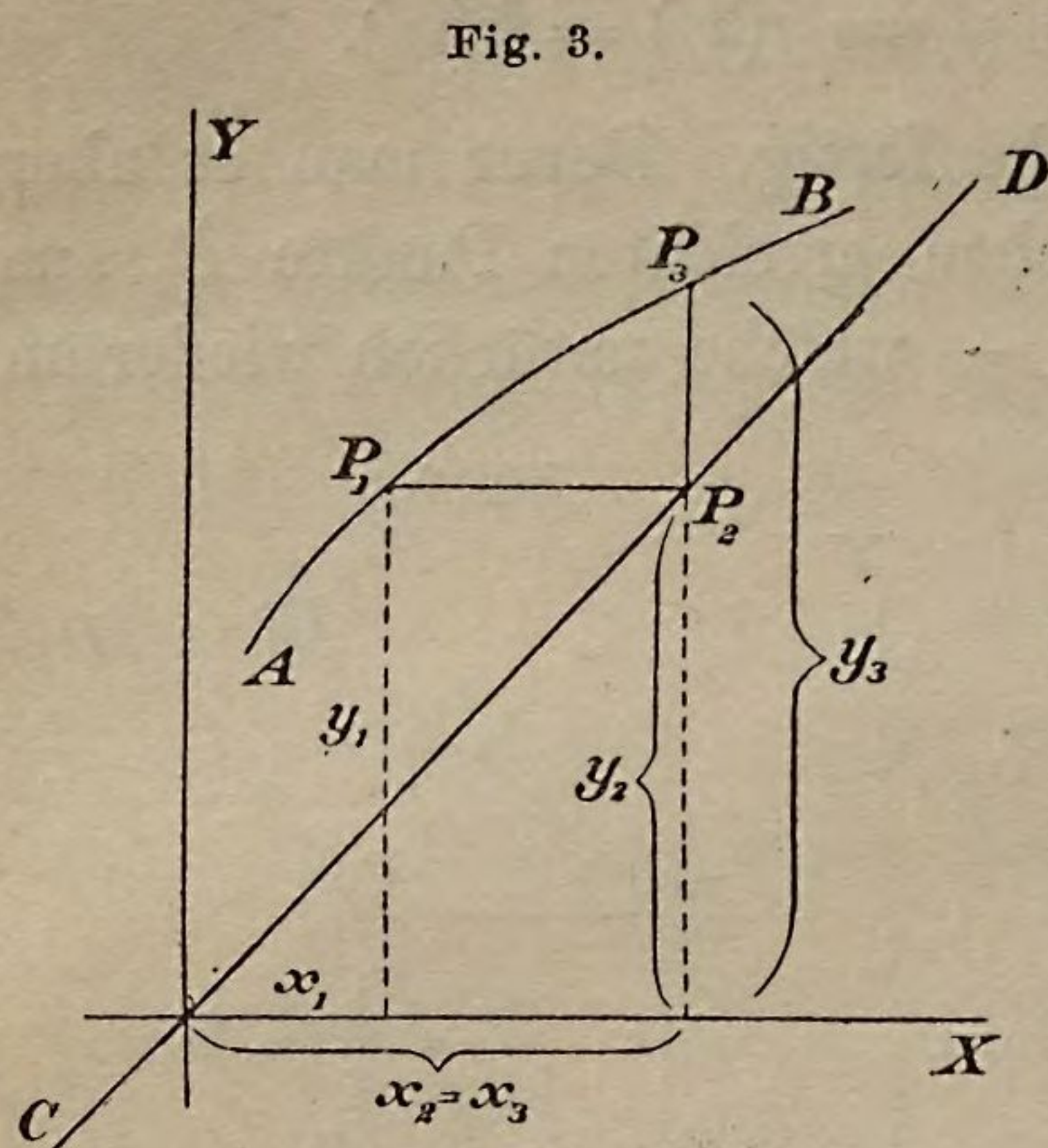
$$y_1 = f(x_1) = k(x_1) = y_2 = g(x_2) = k(x_2) = x_2.$$

Wie jetzt auch die zweite Brücke am einfachsten erhalten wird, ist leicht zu sehen. Man ziehe durch P_2 eine Parallele zur Y -Achse (Fig. 3). Trifft diese die Kurve AB im Punkte

P_3 , dessen Koordinaten x_3 und y_3 , so ist augenscheinlich

$$x_3 = x_2 \quad \text{und} \quad y_3 = f(x_3).$$

Letzteres Verfahren ist übrigens in jedem Falle, mag die Funktion $g(x)$ lauten, wie sie will, das einfachste. Fassen wir aber die eben erwähnte Form, wo $g(x)$ sich auf ein bloßes x einschränkt, ins Auge, so haben wir für CD als Kurvengleichung die Relation $y = x$, und diese stellt eine



Gerade dar, welche den ersten und dritten Quadranten halbiert. Die Bedeutung dieser Linie kann folgendermaßen aufgefaßt werden:

Legt man die Gleichung 1) zu Grunde und betrachtet die reellen Wurzeln derselben als Schnittpunkte, so liegen diese dort, wo die Kurve $y = F(x)$ die X -Achse schneidet; letztere ist also dann Trägerin all dieser Wurzelpunkte und kann in solchem Sinne mit dem Namen „Wurzelachse“ bezeichnet werden. Legt man aber die Gleichung 2) zu Grunde, so ist die X -Achse nicht mehr „Wurzelachse“, sondern die eben erwähnte Gerade $y = x$ ist es, weil jetzt auf ihr alle Durchschnittspunkte zu finden sind, welche die reellen Wurzeln der Gleichung bezeichnen. Daher soll sie es auch sein, die im Folgenden „Wurzelachse“ heißt; man wird finden, daß sie von weit größerer Bedeutung ist, als die eigentlichen Achsen des Koordinatensystems.

§ 4. Zu den im Vorigen entwickelten geometrischen Vorstellungen kann man noch auf eine andere Weise gelangen, welche Erwähnung verdient, weil sich weitere fruchtbare Folgerungen daran anknüpfen lassen.

Verbinden wir nämlich nicht 2) sondern 1) mit der Gleichung

$y = x$ und betrachten die beiden letzteren als simultan, so können wir an beliebig vielen Stellen, wo in der entwickelten Gestalt von $F(x)$ die Gröfse x vorkommt, diese letztere durch y ersetzen. Dadurch geht 1) über in die Form:

$$6) \quad F(x, y) = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve dar, welche die Gerade $y = x$ an allen reellen Wurzelpunkten der Gleichung $F(x) = 0$ schneidet; denn, wenn aus den simultanen Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $y = x$ die Veränderliche y eliminiert wird, so entsteht ja nichts anderes als $F(x) = 0$.

Weil nun aber der beliebige Ersatz von x durch y eine unbegrenzte Zahl von Möglichkeiten zuläßt, so erkennt man wiederum, daß auch die Zahl der Kurven, die alle durch dieselben Wurzelpunkte gehen, und deren Gleichungen aus 1) abgeleitet werden können, eine unbegrenzte ist. Sehr bemerkenswert ist aber hierbei der Umstand, daß diese Kurven auf eine besondere Art paarweise zusammengehören.

Denken wir uns nämlich die Wurzelachse als ebenen Spiegel, und irgend eine beliebige unter den eben erwähnten Kurven $F(x, y) = 0$, die ich mit dem besonderen Zeichen $F_\lambda(x, y) = 0$ bezeichnen will, spiegele sich in der Wurzelachse, dann ist ihr Spiegelbild offenbar ebenfalls eine Kurve, die durch sämtliche Wurzelpunkte geht. Welche Gleichung aber hat dieses Spiegelbild?

Vertauschen wir in $F_\lambda(x, y)$ die Veränderlichen, indem wir überall da, wo x steht, y hinsetzen und umgekehrt, und bezeichnen die dadurch entstandene Funktion mit $F_\lambda(y, x)$, so ist klar, daß die Kurve $F_\lambda(y, x) = 0$ zu der Y-Achse genau dieselbe Lage hat, wie die Kurve $F_\lambda(x, y) = 0$ zur X-Achse. Dies genügt, um darzuthun, daß erstere Kurve überall das genaue Spiegelbild der letzteren ist. (Man vergleiche Fig. 4 S. 16, wo UV der Gleichung $F_\lambda(y, x)$ entspricht, wenn ST durch die Gleichung $F_\lambda(x, y)$ dargestellt wird.)

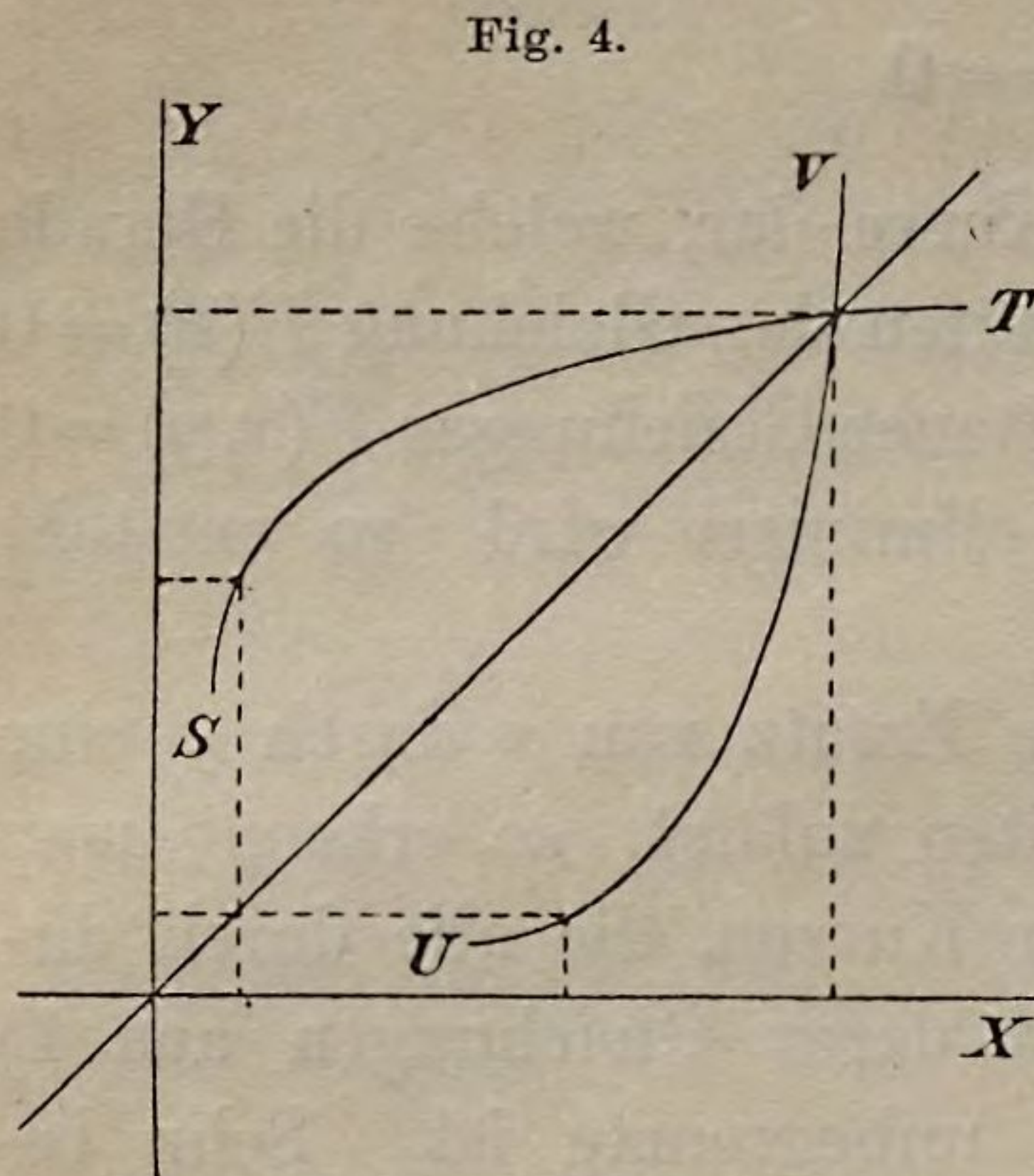
Denken wir uns nun aus der Gleichung $F_\lambda(x, y) = 0$ die Gröfse y ausgerechnet, also die Form $y = f_\lambda(x)$ hergestellt, so ist f_λ dieselbe Funktion, die wir auch erhalten würden, wenn wir aus der Gleichung $F_\lambda(y, x) = 0$ die Gröfse x aus-

rechnen wollten. Und wenn umgekehrt aus $F_\lambda(x, y) = 0$ die Gröfse x ausgerechnet und dadurch $x = v_\lambda(y)$ hergestellt wird, dann muß sich aus $F_\lambda(y, x) = 0$ bilden lassen $y = v_\lambda(x)$.

Von den beiden Funktionen f_λ und v_λ ist jede die Inversion der anderen, und es ergibt sich somit folgender sehr nützliche Satz:

Aus der Kombination der Gleichung $F(x) = 0$ mit der Gleichung $y = x$ läßt sich eine Schar von Kurven ableiten, welche sämtlich durch die Punkte gehen, die den reellen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ entsprechen; diese Kurven

gehören aber paarweise zusammen, wie Gegenstand und Spiegelbild; der Spiegel ist dabei immer die Wurzelachse. Die beiden Gleichungen eines solchen Paares entstehen auseinander durch Auswechselung der Veränderlichen.



III.

Brückenzickzack. Eckige Spiralen. Centripetaler und centrifugaler Verlauf.

§ 5. In Fig. 3 sind zwei Brücken dargestellt, von P_1 nach P_2 und von P_2 nach P_3 . Die zugehörigen algebraischen Bestimmungen heißen:

$$y_1 = f(x_1) = y_2 = x_2 = x_3; \quad y_3 = f(x_3).$$

In der Zeichnung ist aber von zwei möglichen Fällen nur einer berücksichtigt, nämlich der, wo beide Brücken auf ein und derselben Seite der Wurzelachse liegen. Den zweiten Fall stellt Fig. 5 dar, und dieser entspricht den angeführten algebraischen Bestimmungen nicht minder, wie der erste.

Setzen wir obige Gleichungen fort, indem wir schreiben:

$$y_3 = f(x_3) = y_4 = x_4 = x_5; \quad y_5 = f(x_5),$$

so hat die zugehörige geometrische Konstruktion zwei weitere Brücken zu beschaffen, und man erkennt, daß diese letzteren

Fig. 5.

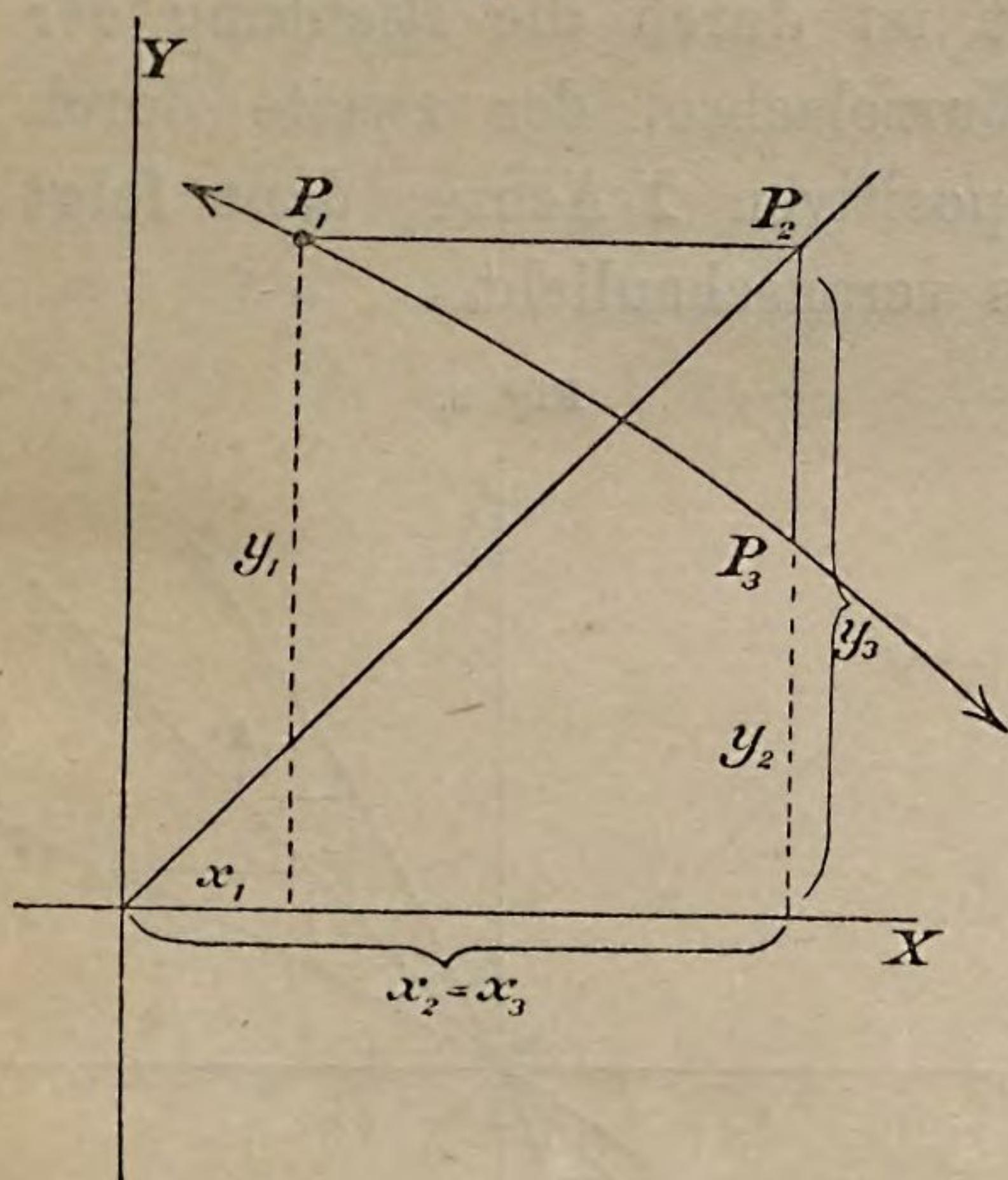
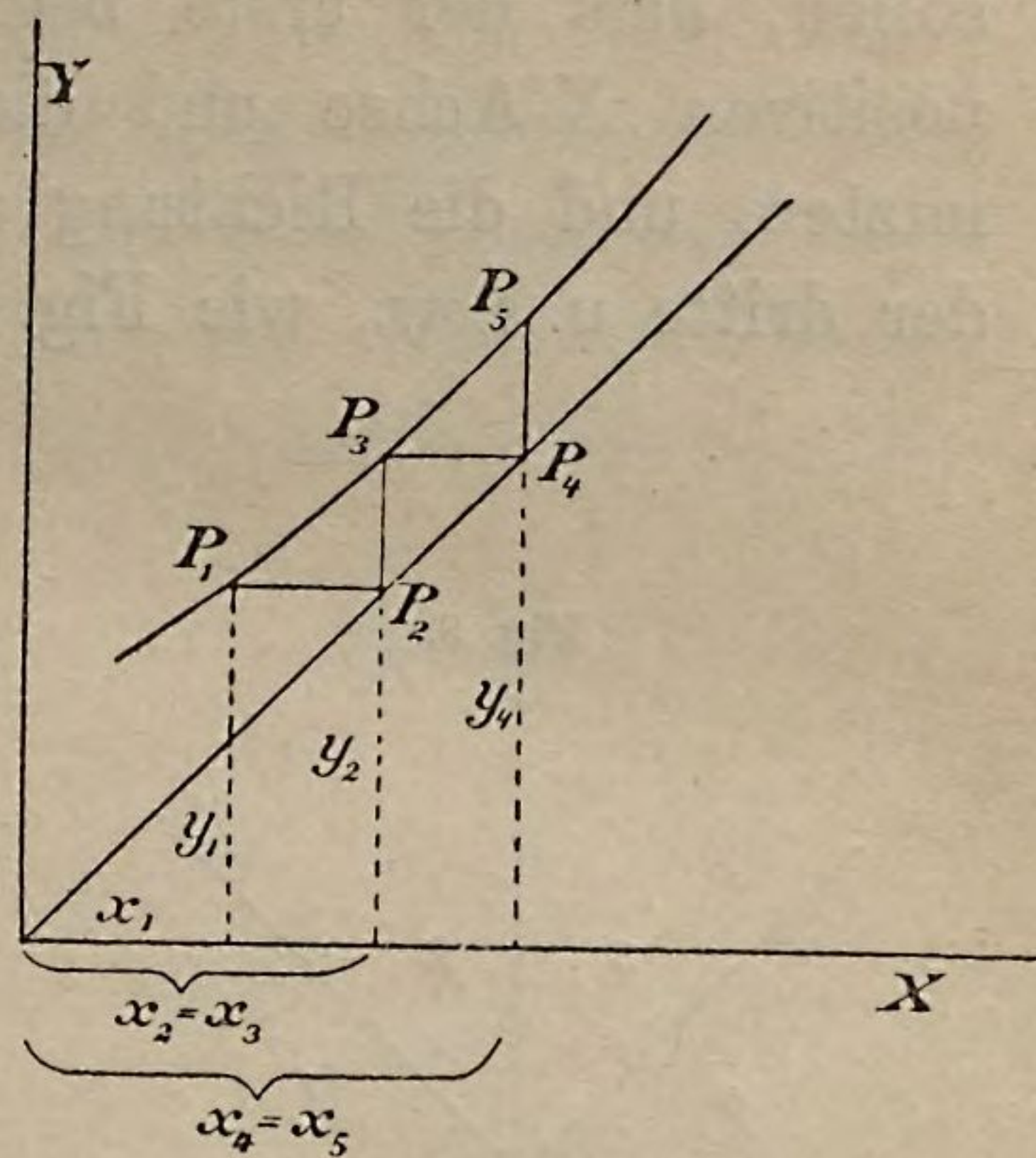
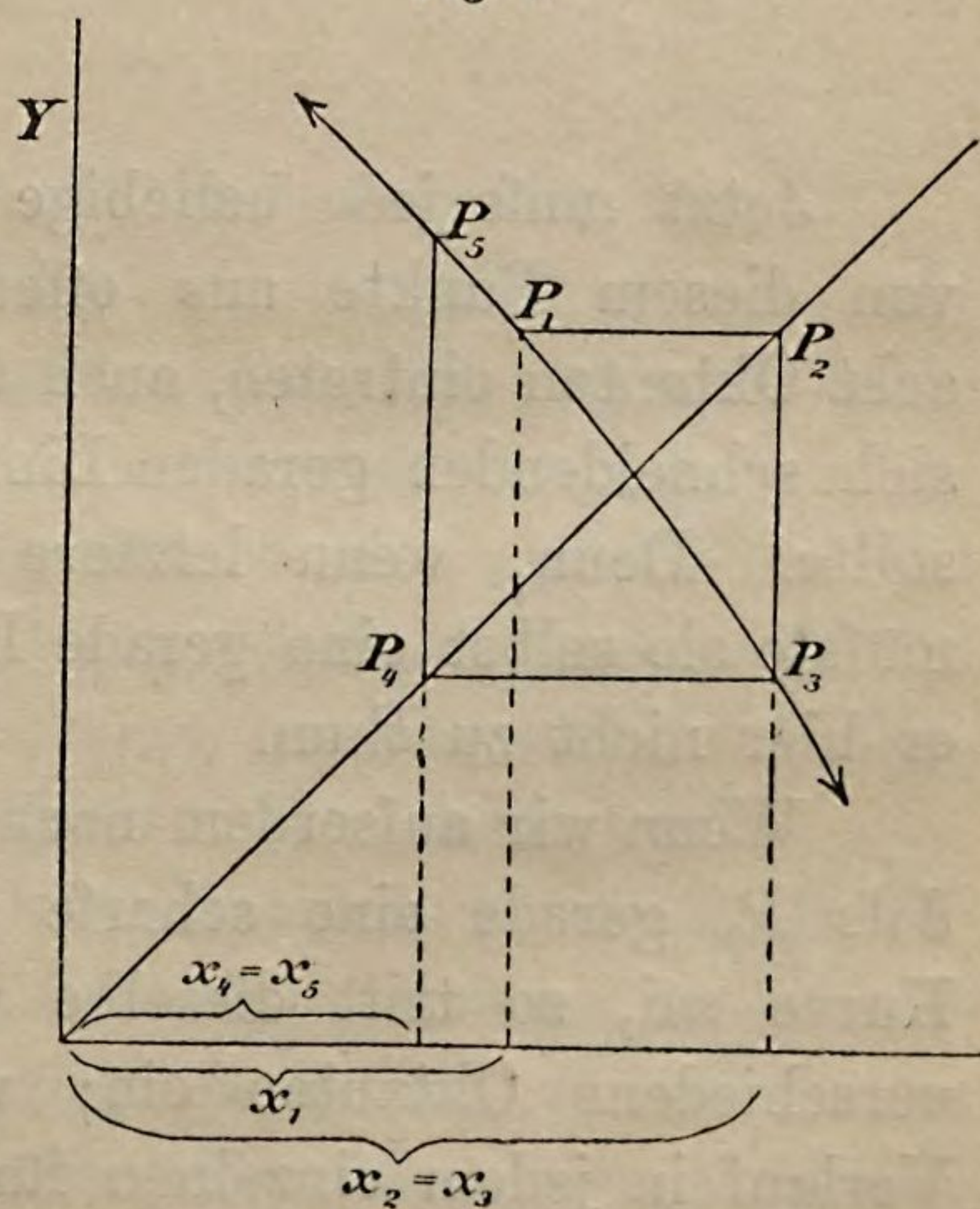


Fig. 6.



mit den früheren Brücken zusammen entweder einen treppenartigen Zickzack (Fig. 6) oder eine Art eckiger Spirale (Fig. 7) darstellen. — Stets in dieser Weise fortfahrend kann man sowohl den Zickzack wie die eckige Spirale beliebig weit ausdehnen. Beide werden sich dabei entweder einer Grenze nähern oder nicht, und dies zu entscheiden ist die Aufgabe, auf deren Lösung es zunächst ankommt.

Fig. 7.

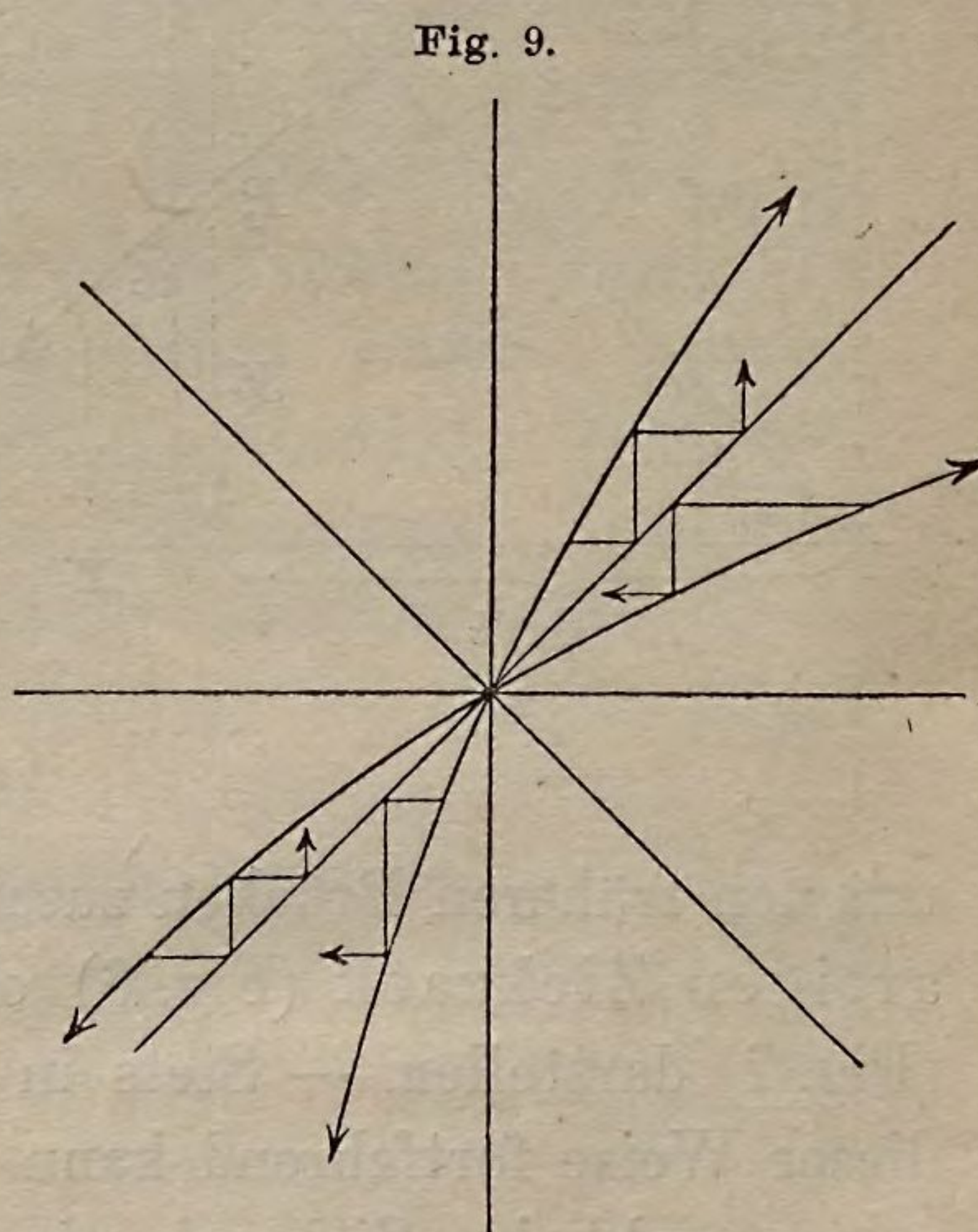
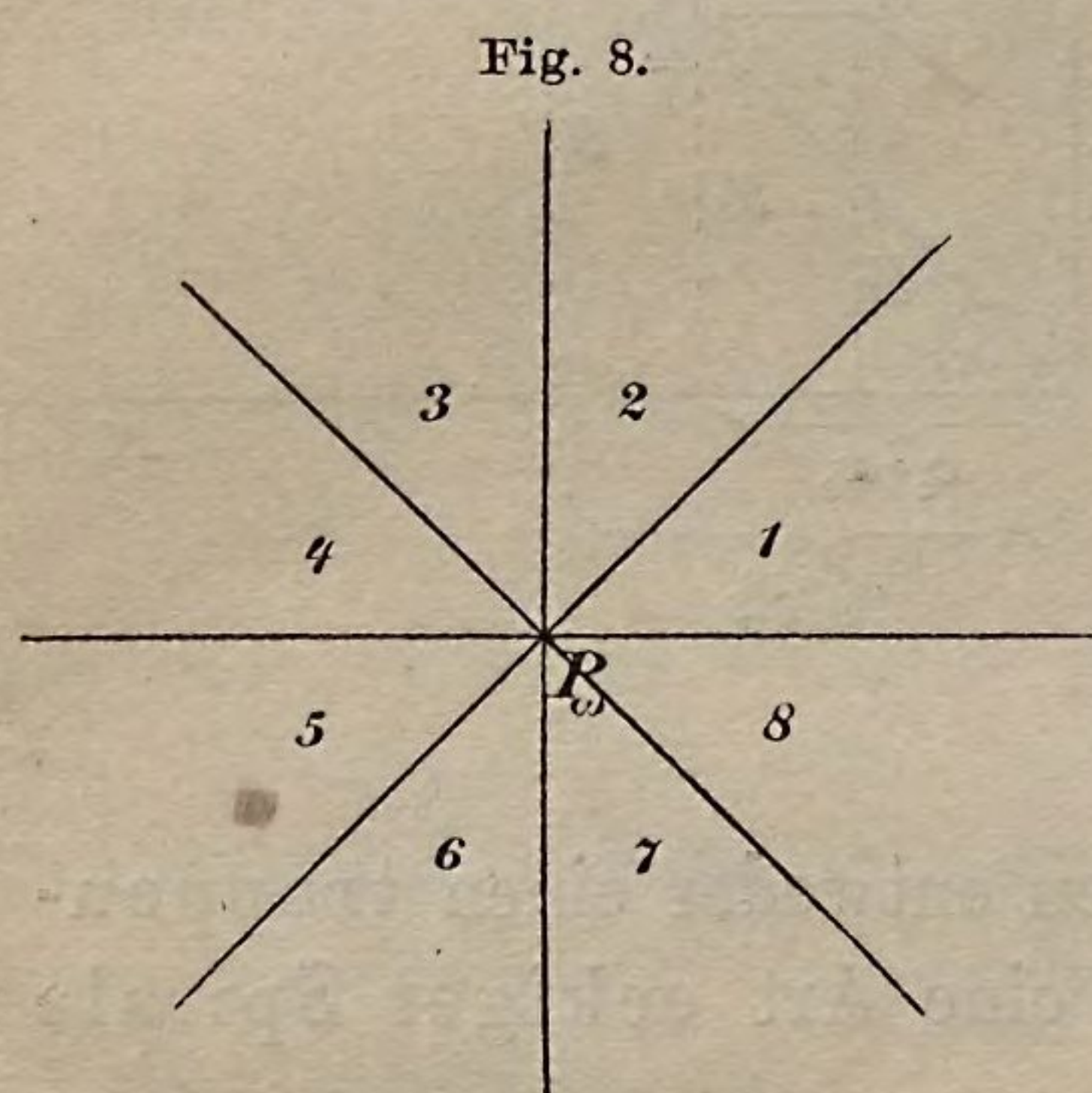


Nehmen wir an, irgend ein Punkt P_w sei Wurzelpunkt der Gleichung $F(x) = 0$. Dann gehen die Kurven:

$$F(x, y) = 0, \quad F(y, x) = 0, \\ y = f(x), \quad y = g(x), \quad y = h(x),$$

von welchen in den Paragraphen 3, 4 und 5 die Rede war,

sämtlich durch P_w . Ziehen wir jetzt durch P_w eine Parallele zur X -Achse und eine Parallele zur Y -Achse, so erhalten wir vier Quadranten, von denen zwei durch die Wurzelachse schon halbiert sind. Halbieren wir auch noch die beiden anderen, so sind acht Oktanten vorhanden, welche so nummeriert werden sollen, daß der erste begrenzt ist durch die Richtung der positiven X -Achse und die Wurzelachse, der zweite durch letztere und die Richtung der positiven Y -Achse; dann folgt der dritte u. s. w., wie Fig. 8 es veranschaulicht.



Jetzt muß jede beliebige Kurve, welche durch P_w geht, von diesem Punkte aus offenbar in mindestens einen der acht Oktanten eintreten, auch dann, wenn eine unter den dort sich schneidenden geraden Linien Tangente an die Kurve sein sollte. Denn, wenn letztere in keinen Oktanten einträte, müßte sie selbst eine gerade Linie sein, und damit haben wir es hier nicht zu thun.

Wenn wir außerdem noch den Ausnahmefall ausschließen, daß P_w gerade eine scharfe Spitze, ein Rückkehrpunkt der Kurve sei, so tritt dieselbe von P_w aus notwendig in zwei verschiedene Oktanten ein; wir wollen aber zunächst den Verlauf in jedem einzelnen für sich betrachten.

Wie erinnerlich, liegt der gewählte Anfangspunkt P_1 immer auf der Kurve, nicht auf der Wurzelachse, ferner läuft

die erste Brücke $P_1 P_2$ stets der X-Achse parallel. Daher ist aus Fig. 9 sofort ersichtlich, daß im ersten, zweiten, fünften und sechsten Oktanten ein Treppen-Zickzack entsteht, und daß dieser im ersten und fünften auf den Punkt P_ω zustrebt, centripetal ist, im zweiten und sechsten aber von ihm weg geht, centrifugal ist.

In den vier übrigen Oktanten hingegen entsteht, wie Fig. 10 zeigt, gar kein Zickzack, und ebensowenig kommt, wenn man nur diese einzelnen Oktanten in Betracht zieht, eine eckige Spirale daselbst zu Stande; denn schon die erste Brücke geht

Fig. 10.

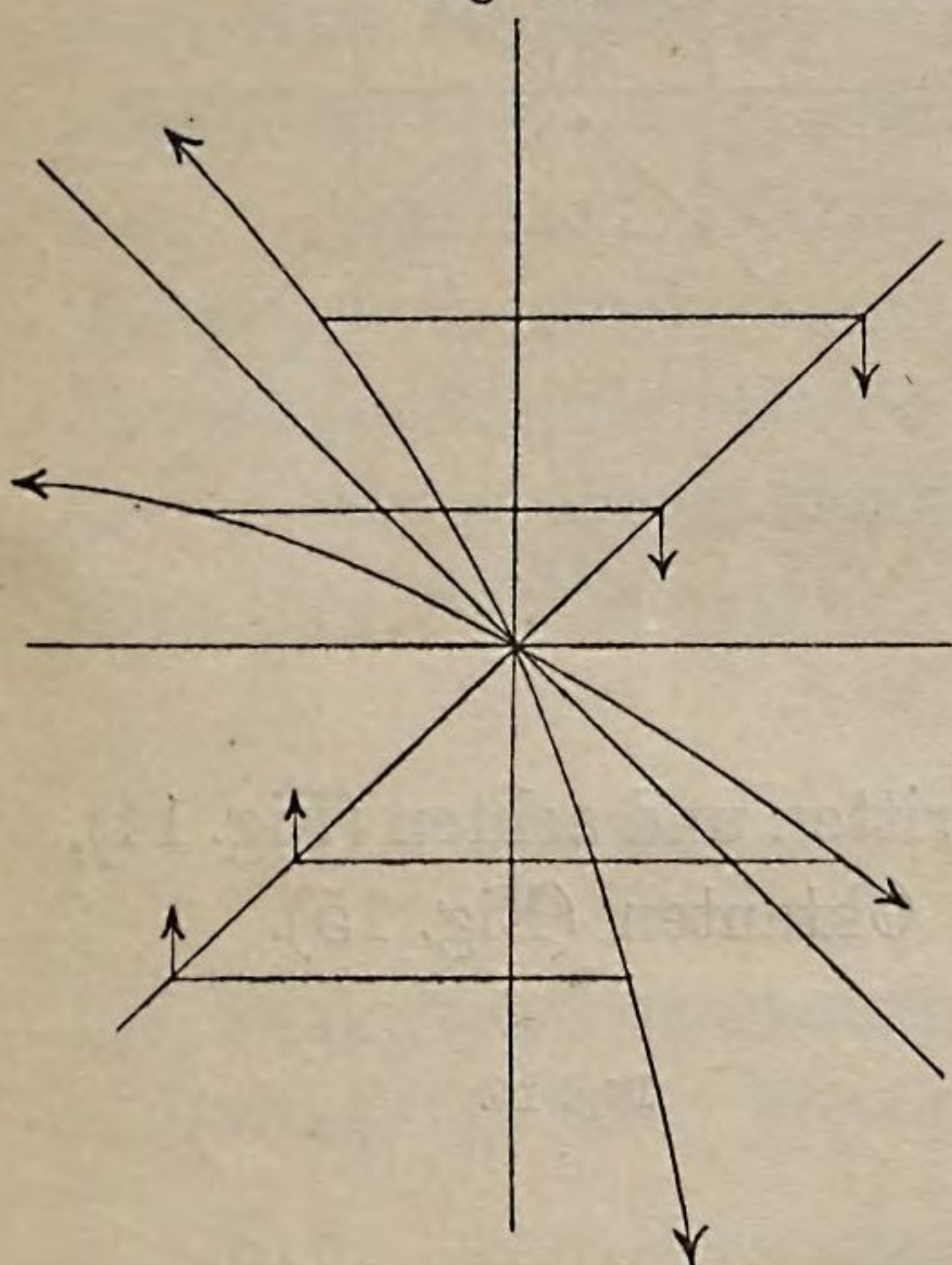
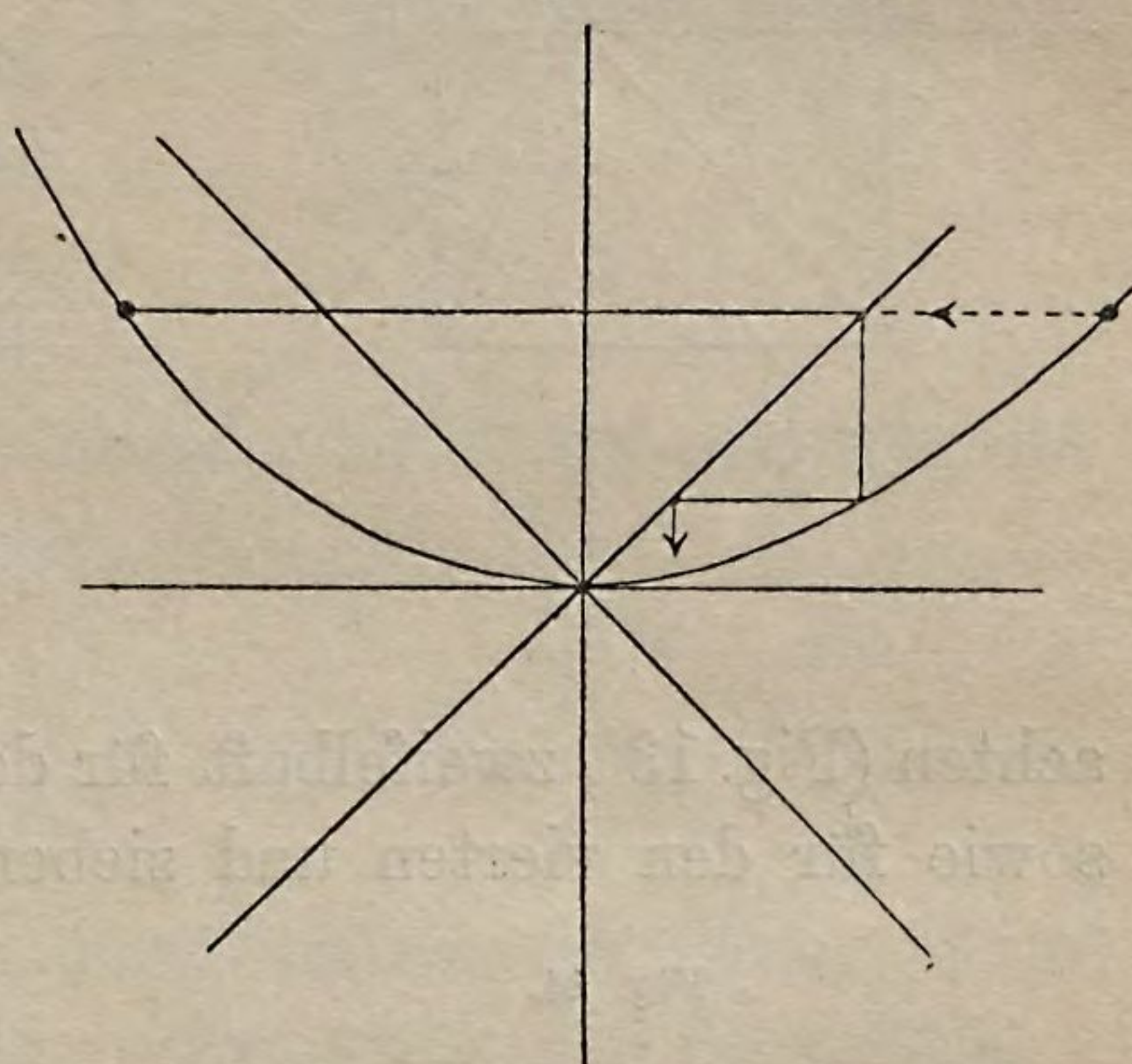


Fig. 11.



ganz aus demjenigen Oktanten heraus, worin sie beginnt. Wir sind also genötigt, den Verlauf der Kurve aus einem der letzterwähnten Oktanten über P_ω hinaus in einen anderen zu verfolgen. Nun aber kann man beispielsweise aus Fig. 11 ersehen und sich selbst durch Zeichnung anderweitiger Fälle von folgender Thatsache überzeugen:

Läuft die Kurve aus einem der Oktanten 3, 4, 7, 8 durch P_ω hindurch in einen der übrigen Oktanten hinein, so laufen die Brücken in dem letzteren gerade so weiter, als ob sie in ihm auch begonnen hätten. Dieser Fall führt also nicht zu neuen Anschauungen; deshalb bleibt bloß noch zu erwägen, was mit den Brücken dann geschieht, wenn die Kurve aus

dem dritten oder vierten Oktanten in den siebenten oder achten eintritt, beziehungsweise umgekehrt.

Aus den Figuren 12 bis 15 geht hervor, daß dann stets eine eckige Spirale entsteht. Diese ist centrifugal für den dritten und siebenten (Fig. 12), centripetal für den vierten und

Fig. 12.

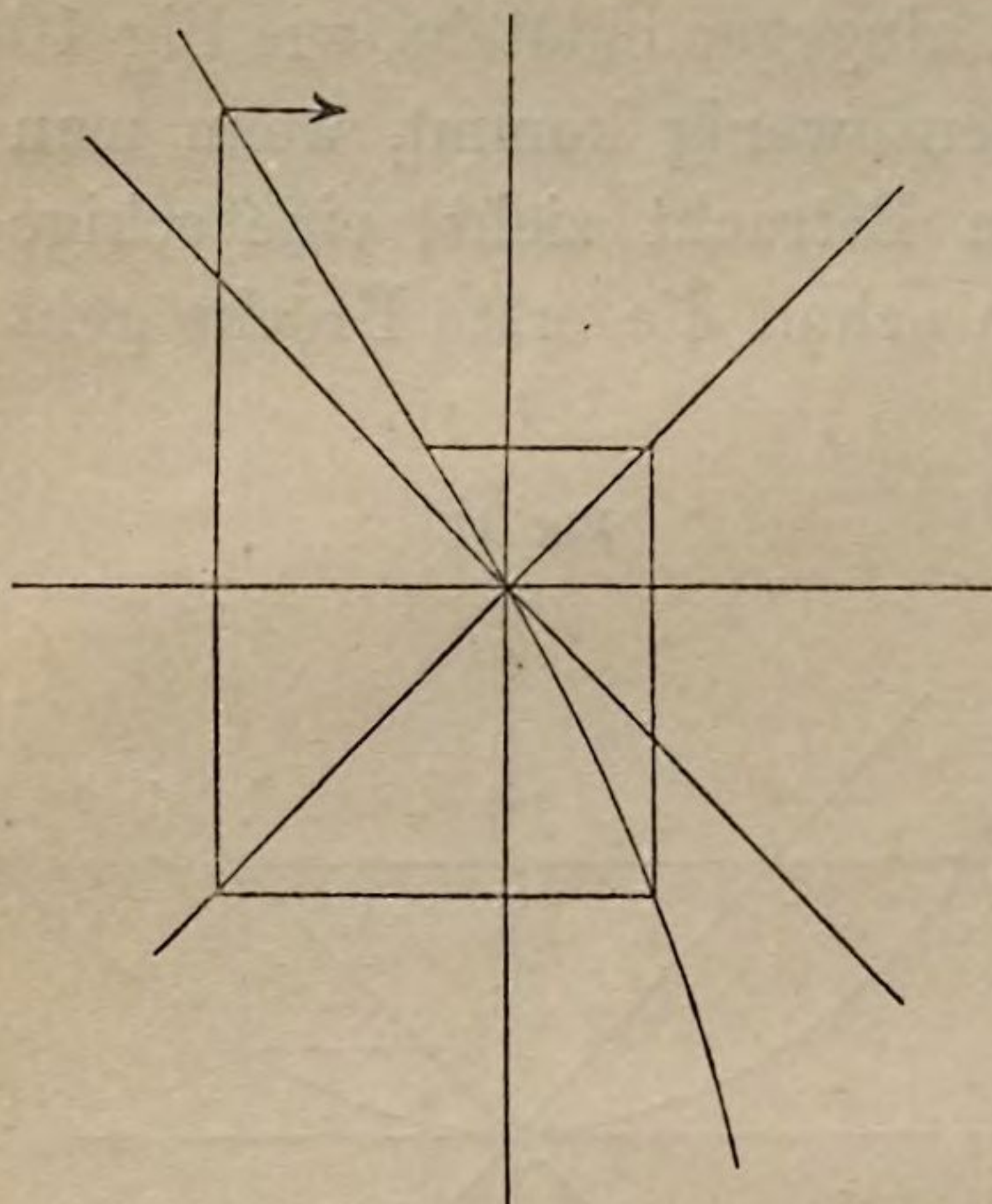
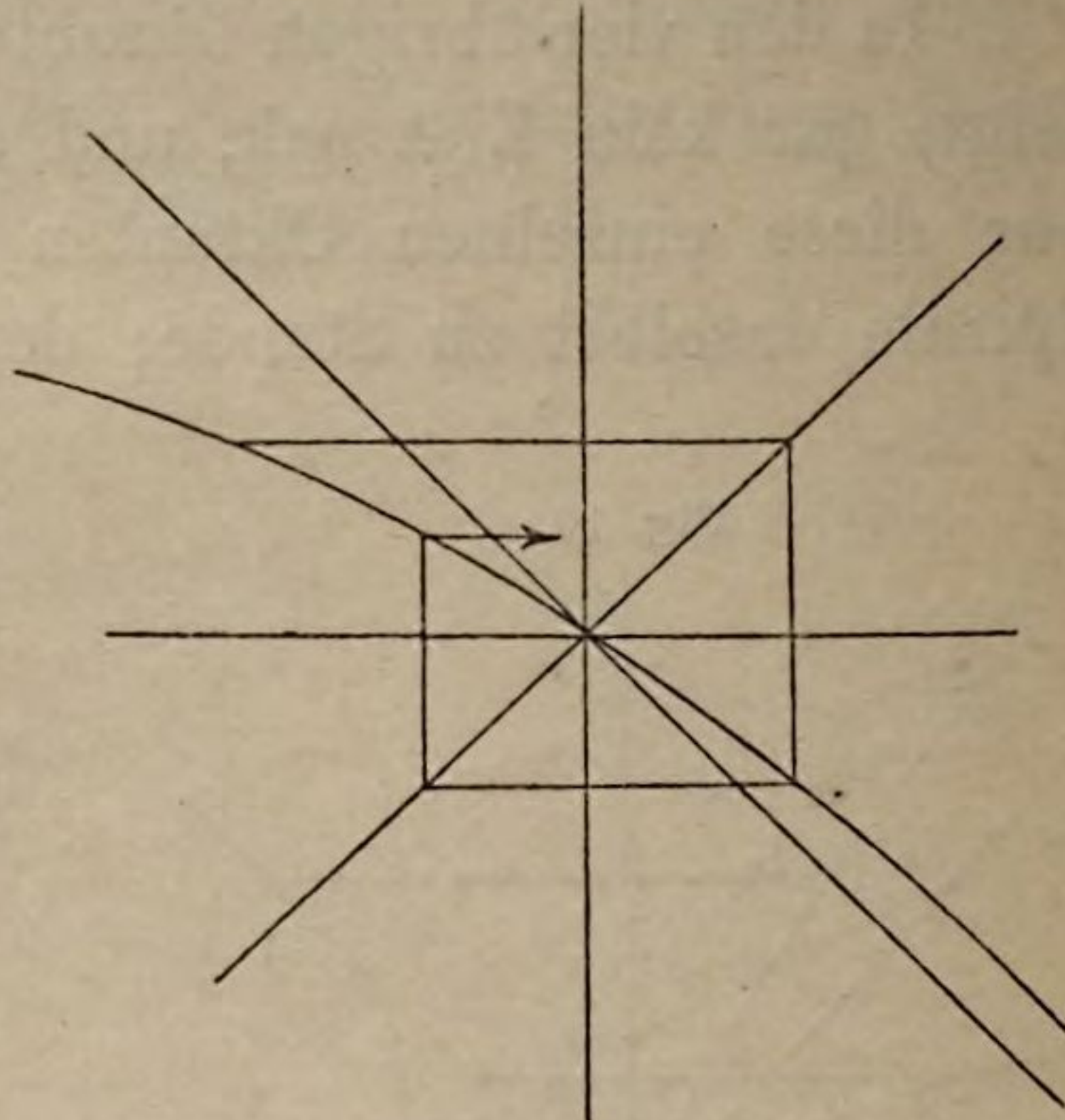


Fig. 13.



achten (Fig. 13), zweifelhaft für den dritten und achten (Fig. 14), sowie für den vierten und siebenten Oktanten (Fig. 15).

Fig. 14.

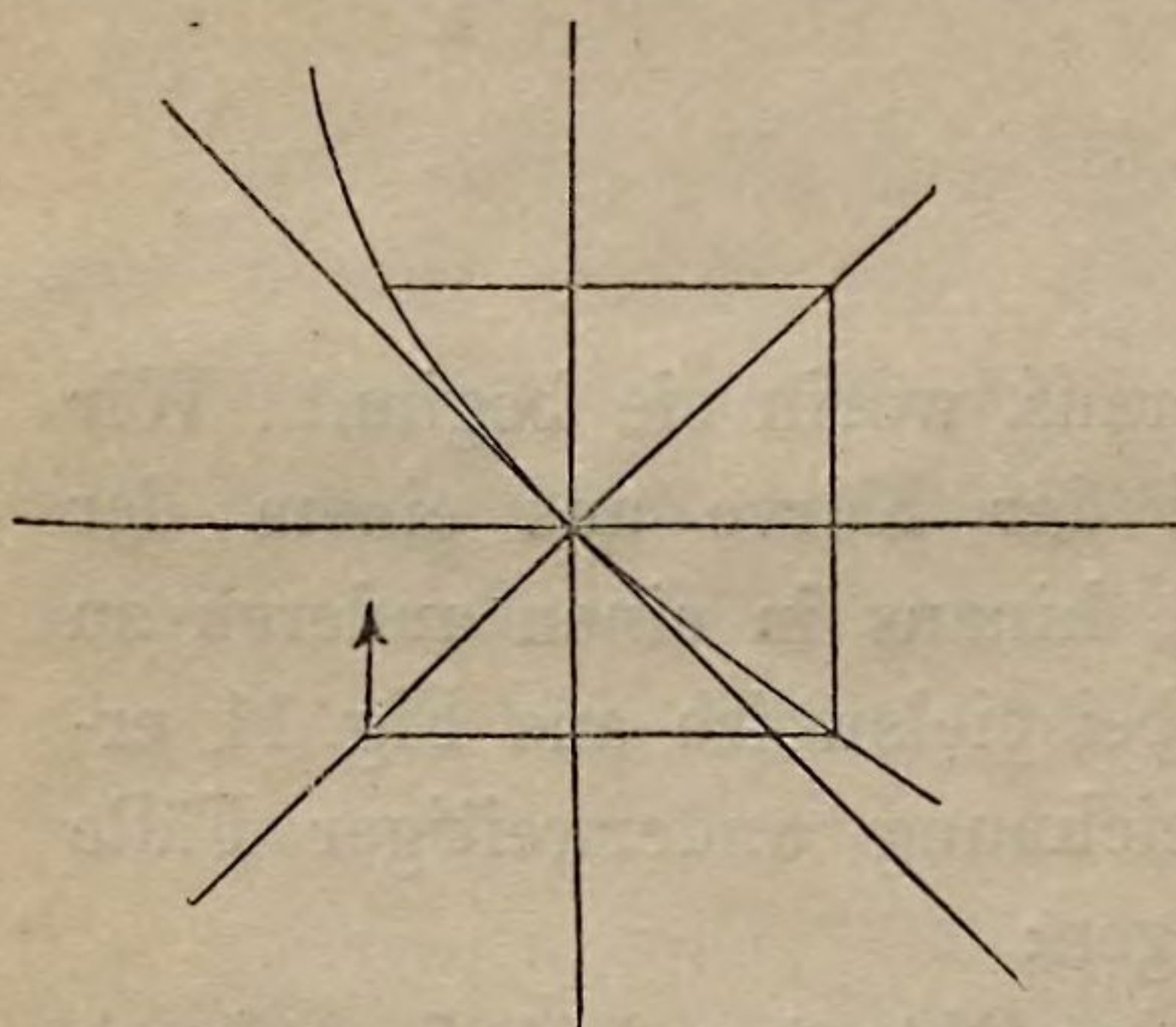
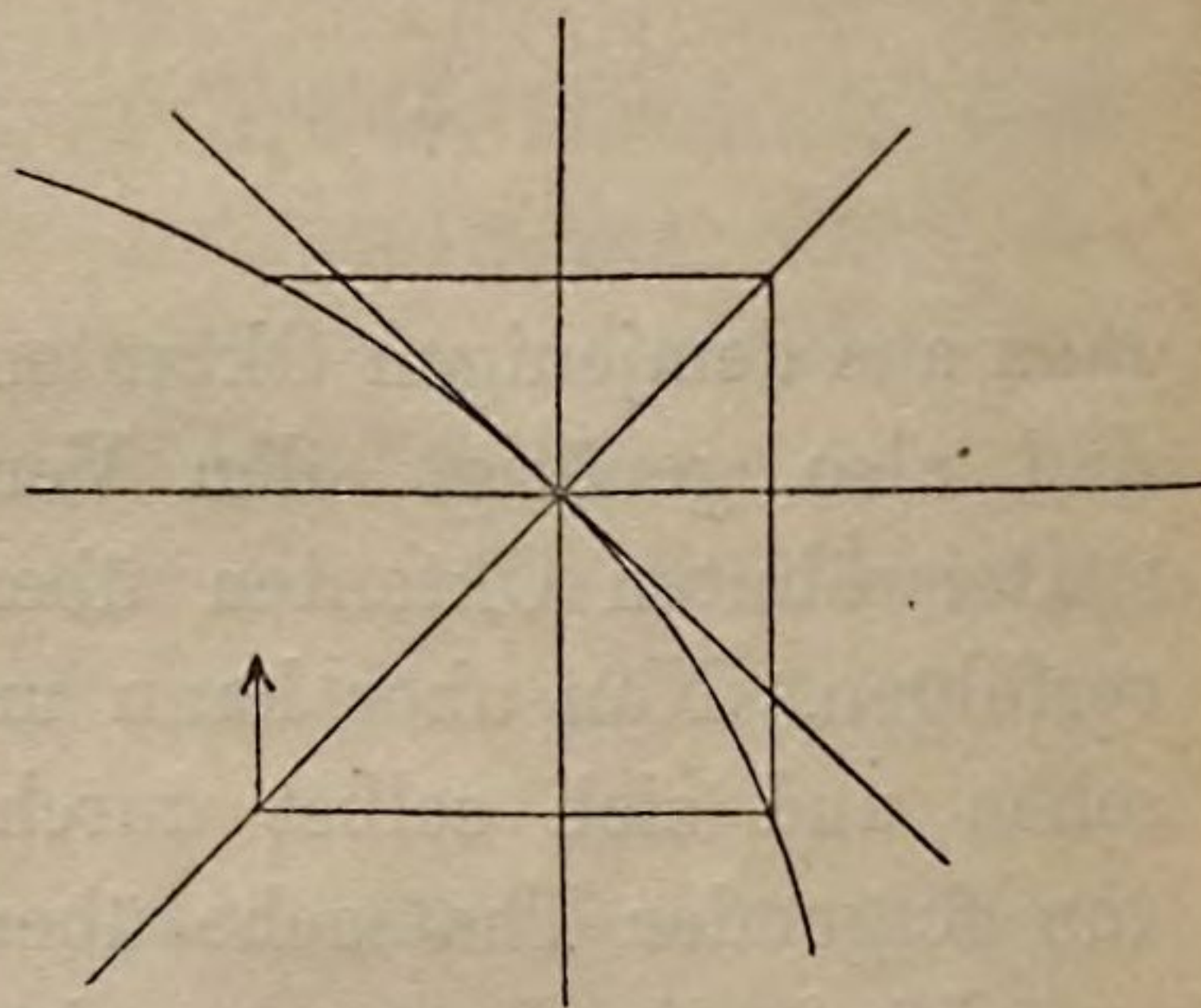


Fig. 15.

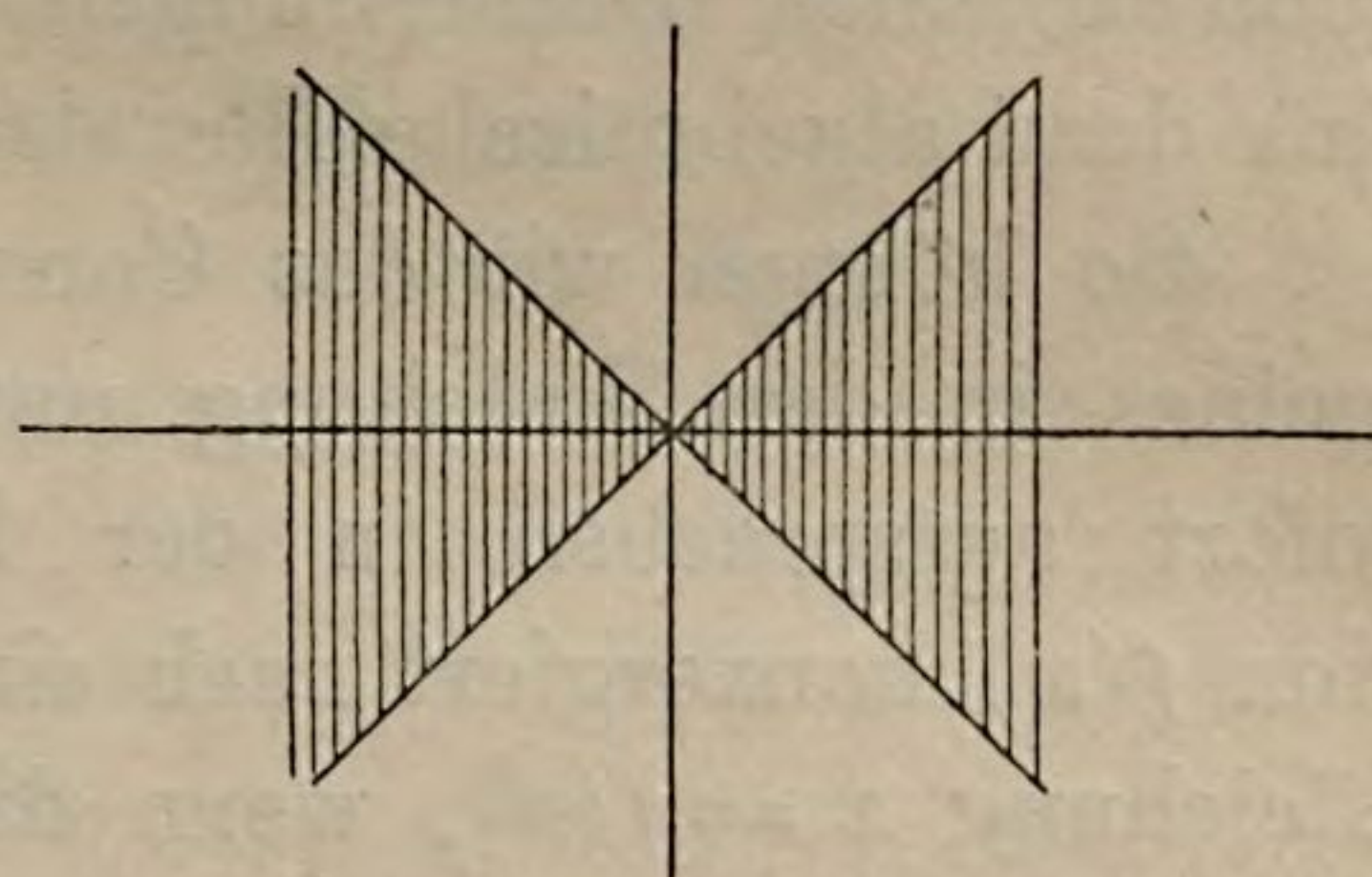


Fassen wir alles zusammen, so haben wir folgendes Ergebnis: Centripetal ist der Verlauf, sei's Treppe, sei's Spirale, immer dann, wenn die Kurve nicht aus dem Raume herausgeht, den der erste, vierte, fünfte und achte Oktant umfassen. Centrifugal ist der Verlauf, wenn die Kurve in den

übrigen Oktanten bleibt, zweifelhaft, wenn sie aus dem centripetalen Gebiet in den dritten oder in den siebenten Oktanten eintritt. Diese beiden Fälle kennzeichnen sich dadurch, daß in ihnen, wie Fig. 14 und 15 sofort erkennen lassen, das in P_ω auf der Wurzelachse errichtete Lot eine Tangente an die Kurve ist.

Von diesen besonderen Fällen vorläufig abgesehen, können wir sagen, daß die Wurzelachse und das in einem Wurzelpunkt auf ihr errichtete Lot die Umgebung des Wurzelpunktes in vier Quadranten teilen, von denen zwei dem centripetalen, zwei dem centrifugalen Gebiete angehören (Fig. 16). Centripetal sind diejenigen Quadranten, welche von einer durch den Wurzelpunkt gehenden Parallele zur X-Achse durchschnitten werden; durch die centrifugalen geht eine Parallele zur Y-Achse.

Fig. 16.



IV.

Die Funktionswiederholung in ihrer einfachsten Form. Erste Bedingung ihrer Konvergenz. Erörterung der Grenzfälle.

§ 6. Die Gleichungen, welche das Brückenschlagen von Punkt zu Punkt begleiten und sowohl für die Treppe, wie für die Spirale zutreffen, lauten nach dem vorhin Entwickelten:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = y_2 = x_2 = x_3, \\ y_3 &= f(x_3) = y_4 = x_4 = x_5, \\ y_5 &= f(x_5) = y_6 = x_6 = x_7, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Da mithin $x_3 = f(x_1)$ und $x_5 = f(x_3)$ ist, so erhalten wir durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x_3) &= f(f(x_1)) = f_2(x_1), \\ f(x_5) &= f(f(f(x_1))) = f_3(x_1), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Die Abscissen der auf der Kurve $y = f(x)$ liegenden Punkte P_1, P_3, P_5 etc. stellen also diejenigen Werte dar,

welche die Funktion $f(x)$ nach ihrer jedesmaligen Iteration erhält. Die Abscisse des Wurzelpunktes P_w ist eine reelle Wurzel der Gleichung $x = f(x)$, und die Iteration ist konvergent, wenn der Zickzack oder die Spirale centripetal verläuft, anderenfalls aber divergent.

Wir sehen also, daß diese Aneinanderfügungen von Brücken zwischen der Kurve und der Wurzelachse ein treues geometrisches Bild geben von dem Verlauf der ganzen Iteration. Daher ist es ein Leichtes, aus den geometrischen Darstellungen die Gesetze der Iteration, ohne daß dazu algebraische Beweise nötig wären, einfach abzulesen.

So können wir das Convergenzgesetz, welches den Inhalt meines in der Einleitung unter I. angeführten Satzes bildet, sofort aussprechen in der Form: Die Iteration der Funktion $f(x)$ konvergiert nach einem reellen Wurzelwerte x_w der Gleichung $x = f(x)$, wenn die Kurve $y = f(x)$ an ihrem betreffenden Durchschnittspunkte mit der Wurzelachse in die centripetalen Quadranten eintritt, oder, was dasselbe besagt, wenn sie dort mit der Richtung der positiven X-Achse einen Winkel bildet, der zwischen $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ liegt.

Heißt dieser Winkel β , so ist bekanntlich $f'(x_w) = \tan \beta$, also muß $f'(x_w)$ zwischen $\tan \frac{\pi}{4}$ und $\tan \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ liegen. Dies wird ausgedrückt durch die Relation:

$$-1 < f'(x_w) < +1 \text{ oder } |f'(x_w)| < 1,$$

wobei mit dem Zeichen $|f'(x_w)|$ der absolute Betrag der Funktion $f'(x_w)$ angedeutet wird.

§ 7. Auch der Unterschied von Treppe und Spirale hat seine algebraische Bedeutung.

Die Treppe nähert sich dem Wurzelpunkte stets von einer Seite her, die Spirale umkreist ihn. Daher können wir aus Fig. 9 sofort das Gesetz ablesen: Ist $f'(x_w) > 0$, so ist die Annäherung einseitig, sie nähert sich der Wurzel von unten oder oben, je nachdem der Anfangswert der Funktionswiederholung kleiner oder größer als die erstrebte Wurzel gewählt worden ist. Wenn hingegen (Fig. 13) $f'(x_w) < 0$ ist, so geschieht die Annäherung doppelseitig, und die Wurzel liegt

immer zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerten.

Hier haben wir also die geometrische Ableitung für den dritten in der Einleitung angeführten Satz.

§ 8. Aus Fig. 16 ist ersichtlich, daß — von der Wurzelachse aus betrachtet — auf der rechten Seite centripetales Gebiet liegt, wenn links centrifugales liegt und umgekehrt. Daraus folgt:

Wenn die Wurzelachse ein Spiegel ist und der Gegenstand im centripetalen Gebiete liegt, so muß das Spiegelbild im centrifugalen liegen und umgekehrt.

Und nun brauchen wir uns nur an das im § 4 von den inversen Funktionen f und v Gesagte zu erinnern, um sofort ohne alle Rechnung einzusehen, daß dann, wenn die eine nicht konvergent ist, die andere konvergent sein muß. — Damit ist der Satz IV der Einleitung bewiesen.

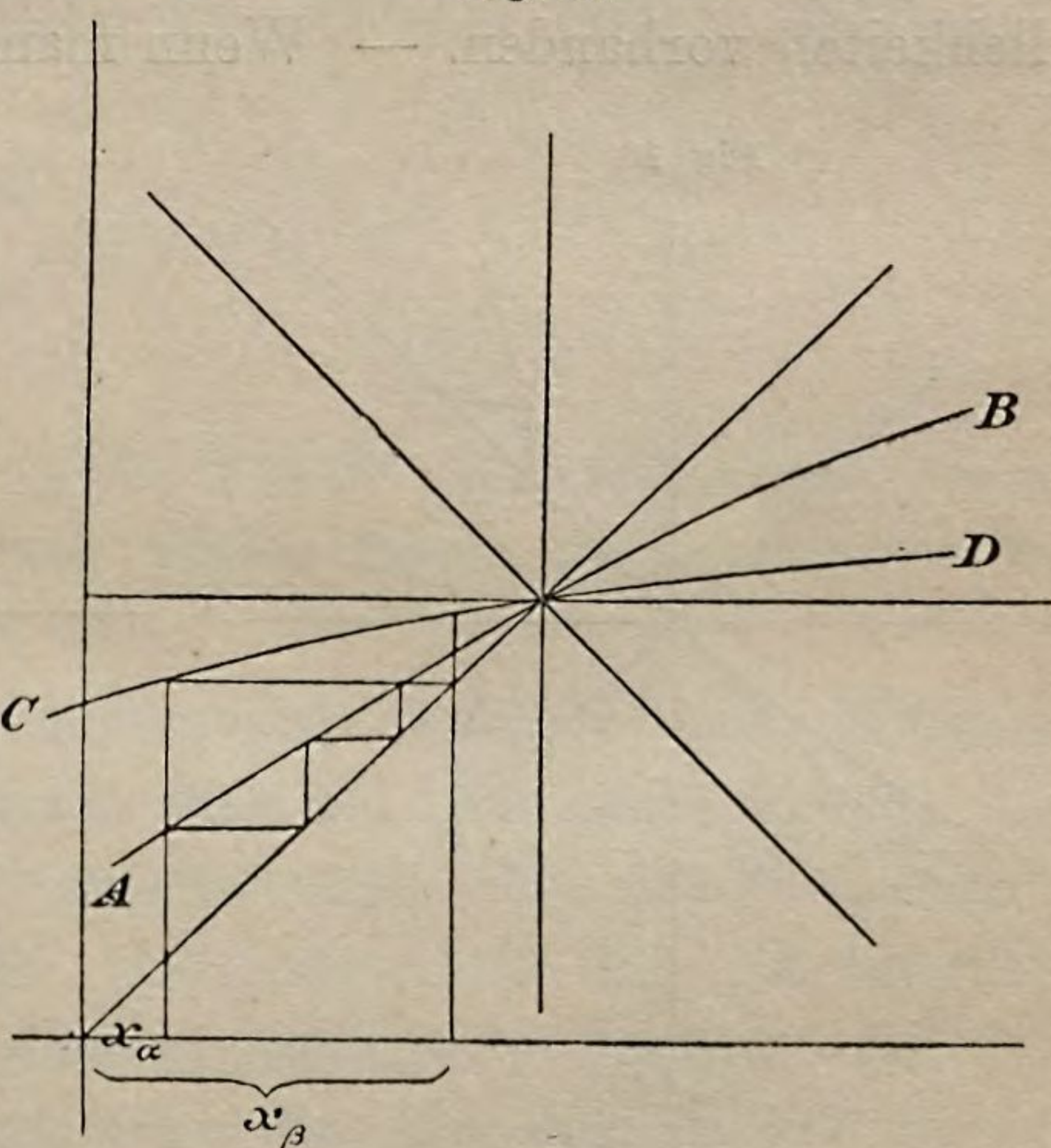
§ 9. Vergleichen wir nunmehr in Fig. 17 die Kurven AB und CD miteinander. — Um von dem Anfangswerte x_α zu dem Werte x_β zu gelangen, sind bei AB sechs Brücken nötig, bei CD aber nur zwei.

Dieser Umstand allein genügt schon als Beweis für den Satz II der Einleitung, welcher aussagt, daß die Annäherung um so rascher sich vollziehe, je flacher die Kurve läuft, d. h. je kleiner der absolute Betrag von $f'(x_w)$ ist.

Wenn aber umgekehrt die Kurve sich in ihrem Laufe der Wurzel-

achse anschmiegt, so wächst, wie man sofort erkennt, die Zahl der Brücken mehr und mehr. Mit der Iteration kommt man immer weniger vom Fleck, und die Konvergenz wird zuletzt eine unendlich langsame in dem Grenzfalle, wo $|f'(x_w)| = 1$ ist.

Fig. 17.



Darum hat, wie ich schon in meiner eingangs erwähnten Abhandlung hervorhob, dieser Fall für das Verfahren der Funktionswiederholung überhaupt keine besondere Bedeutung, um so weniger, als man immer (wie sich nachher ergeben wird) Mittel hat, ihn gänzlich zu vermeiden.

Dennoch möge, weil Herr Netto in seinem schon angeführten Buche diese Fälle einer Rechnung unterzogen hat, hier in aller Kürze ausgeführt werden, was eine direkte geometrische Betrachtung darüber ohne Rechnung lehrt.

§ 10. Die Bedingungsgleichung:

$$|f'(x_w)| = 1$$

schließt für das Gebiet der reellen Größen die beiden Fälle $f'(x_w) = 1$ und $f'(x_w) = -1$ ein. Das von Herrn Netto für den ersteren Fall berechnete Resultat heißt: „Man kann sich also bei $f'(x_w) = 1$ und $f''(x_w) \neq 0$ nur von einer Seite her der Wurzel x_w nähern.“ —

Wenn $f'(x_w) = 1$ ist, so heißt das geometrisch: Die Wurzelachse ist im Punkte P_w eine Tangente an die Kurve $y = f(x)$. Also sind die in Fig. 18 bis 21 dargestellten vier Möglichkeiten vorhanden. — Wenn man sich nun an die bekannte

Fig. 18.

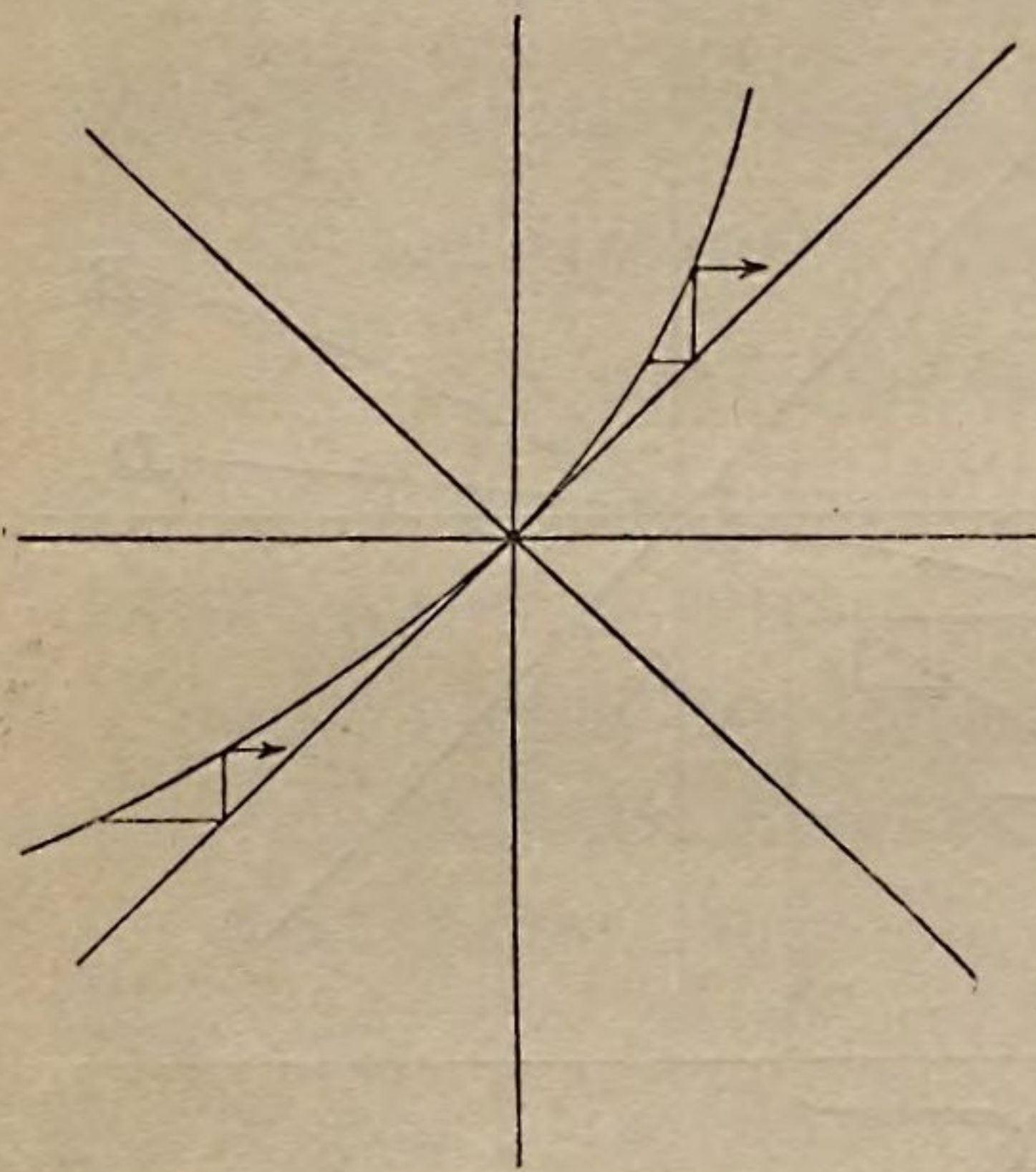
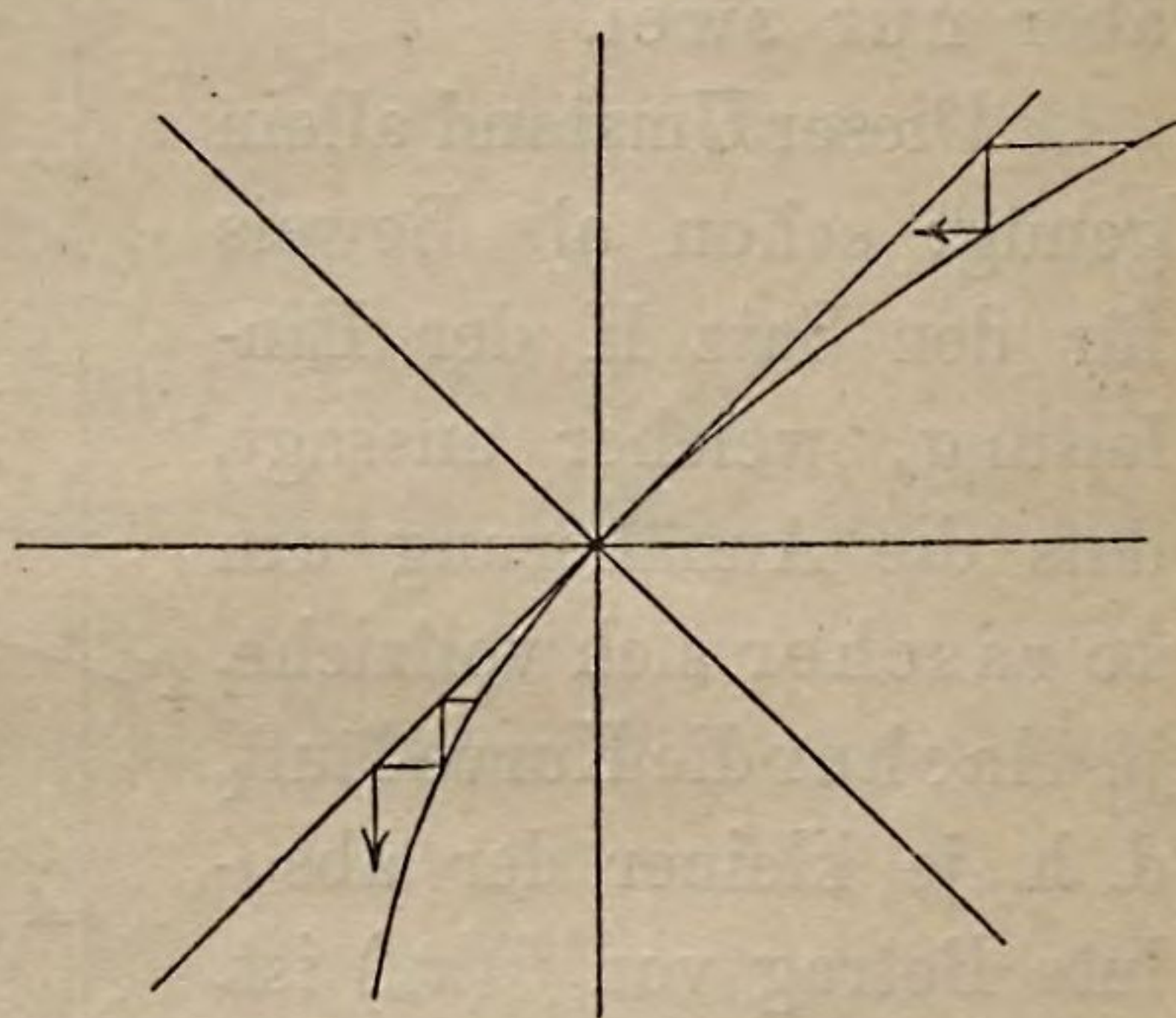


Fig. 19.



Thatsache erinnert, daß die Kurve ihre hohle Seite nach oben oder unten kehrt, je nachdem $f''(x)$ positiv oder negativ ist, daß also mit einem Zeichenwechsel von $f''(x)$ auch die Richtung der Konkavität sich umkehrt, dann ist aus jeder der vier

bezeichneten Figuren sofort ein Satz über die Konvergenz der Iteration abzulesen.

Aus Fig. 18 folgt: Ist $f''(x_w) > 0$, so konvergiert die Iteration oder nicht, je nachdem der Anfangswert kleiner oder größer als x_w gewählt worden.

Aus Fig. 19: Ist $f''(x_w) < 0$, so konvergiert die Iteration oder nicht, je nachdem der Anfangswert größer oder kleiner als x_w gewählt worden.

Aus Fig. 20: Ist $f''(x_w) = 0$ und geht dabei von einem positiven Werte zu einem negativen über, so konvergiert die Iteration von beiden Seiten.

Fig. 20.

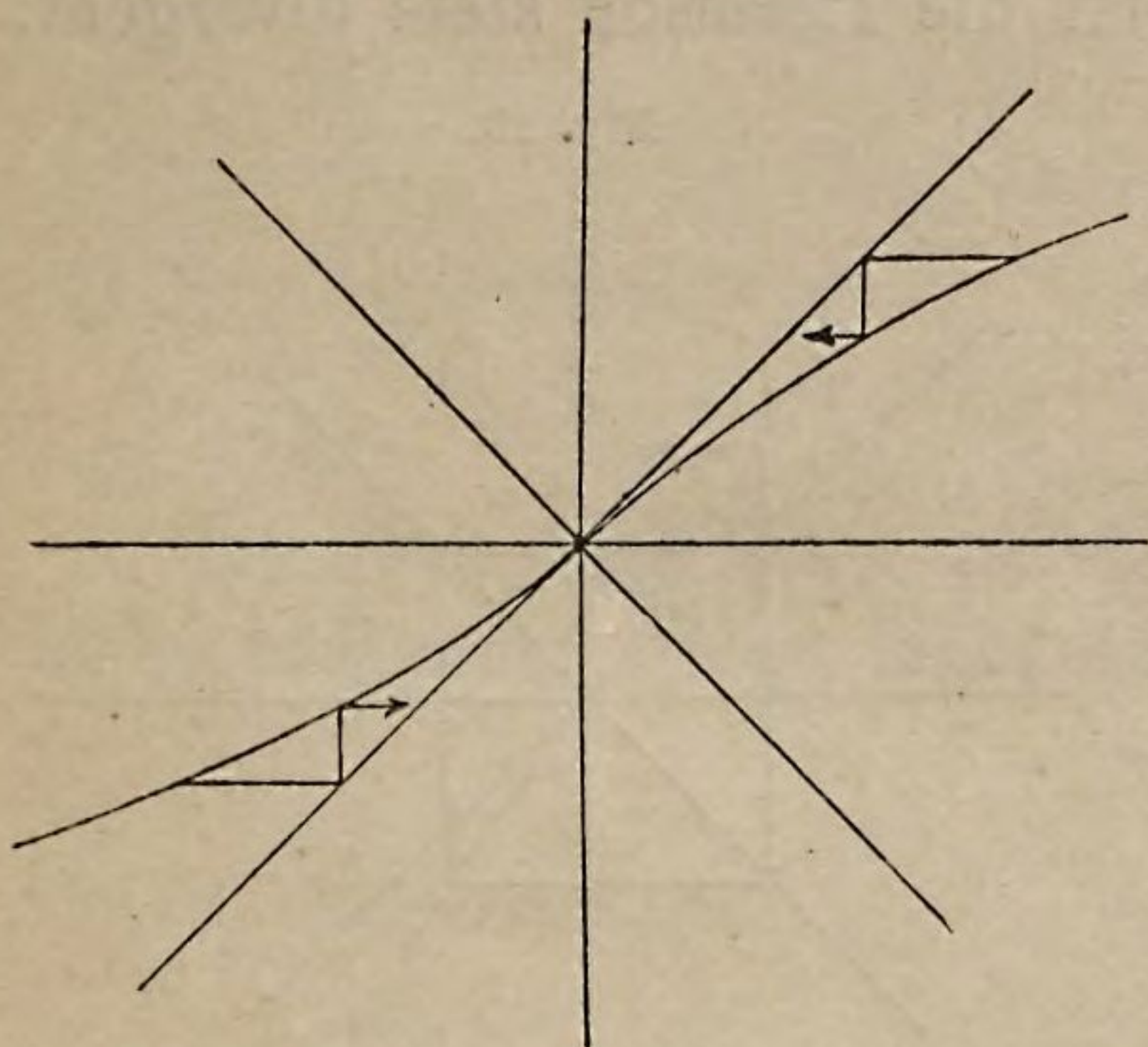
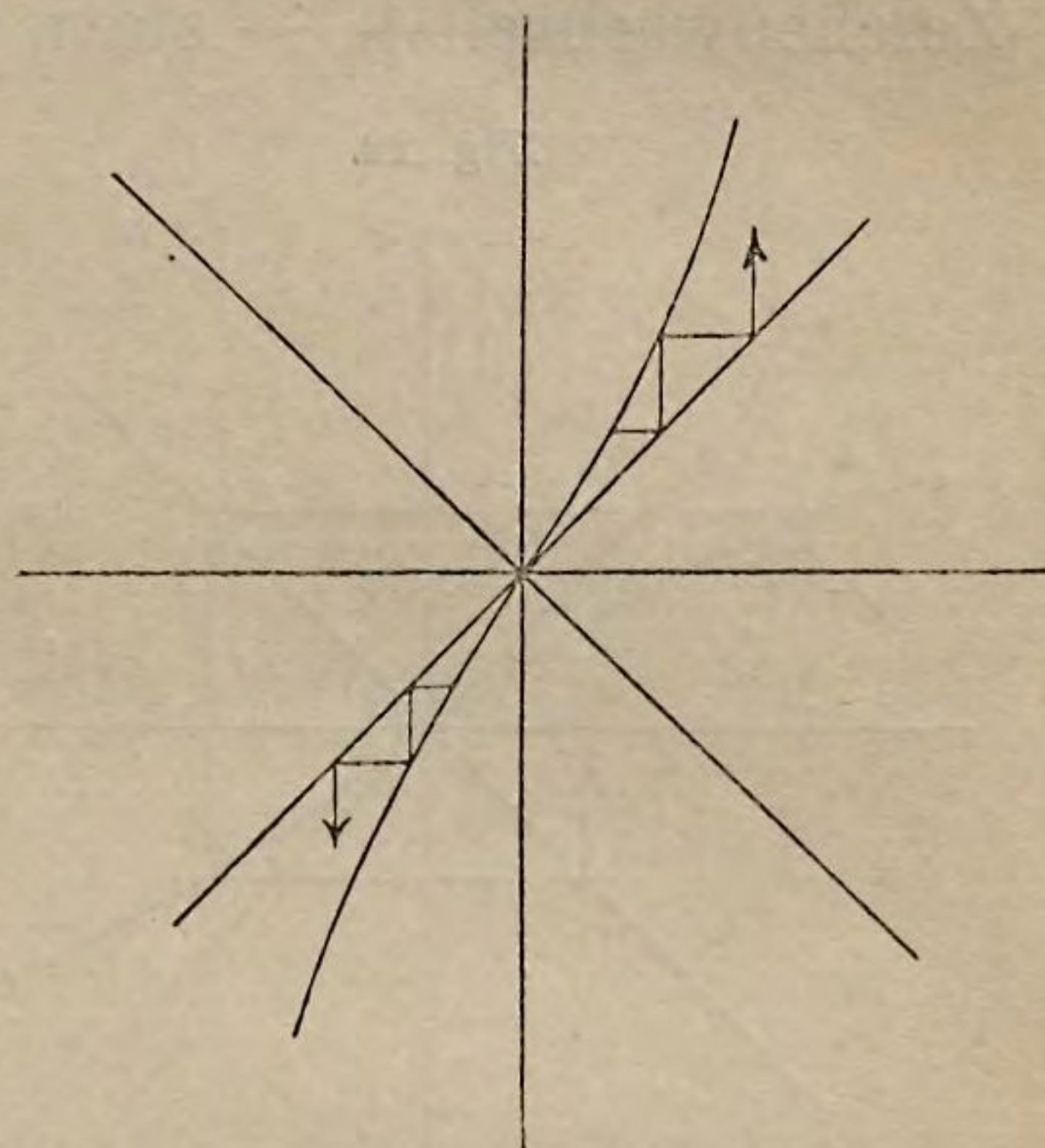


Fig. 21.



Aus Fig. 21: Ist $f''(x_w) = 0$ und geht dabei von einem negativen zu einem positiven Werte über, so konvergiert die Iteration von keiner Seite. —

Die vorstehenden Bemerkungen beziehen sich übrigens bei divergierenden Iterationen bloß auf den anfänglichen Verlauf derselben, wenn sie in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes begonnen werden. Später wird es sich als möglich ergeben, daß eine anfänglich divergierende Iteration dennoch grade nach dem Berührungspunkte hin konvergiert, von dessen Nähe sie ausgegangen ist.

§ 11. Für obigen zweiten Fall:

$$f'(x_w) = -1$$

hat Herr Netto als Resultat angegeben, daß „Konvergenz

stattfinden wird oder nicht, je nachdem $2f'''(x_w) + 3f''(x_w)^2$ einen positiven oder negativen Wert besitzt“ (a. a. O. S. 304).

Bei geometrischer Betrachtung liefert uns die Gleichung $f'(x_w) = -1$ den Fall, wo die Kurve $y = f(x)$ im Punkte P_w auf der Wurzelachse senkrecht steht. Der Endschenkel des dritten Oktanten ist also eine Tangente an die Curve. Daraus ergeben sich die vier Fälle, welche in Fig. 14, 15, 22 und 23 dargestellt sind.

Was zunächst die beiden letzten betrifft, so enthalten sie den Satz: Wenn im Wurzelpunkte $f'(x_w) = -1$ und $f''(x_w) = 0$ ist mit dem Zeichenwechsel $- +$, so ist die Iteration zweiseitig und stets konvergent. Findet aber bei $f''(x_w)$ der Zeichenwechsel $+ -$ statt, so ist die Iteration stets divergent.

Fig. 22.

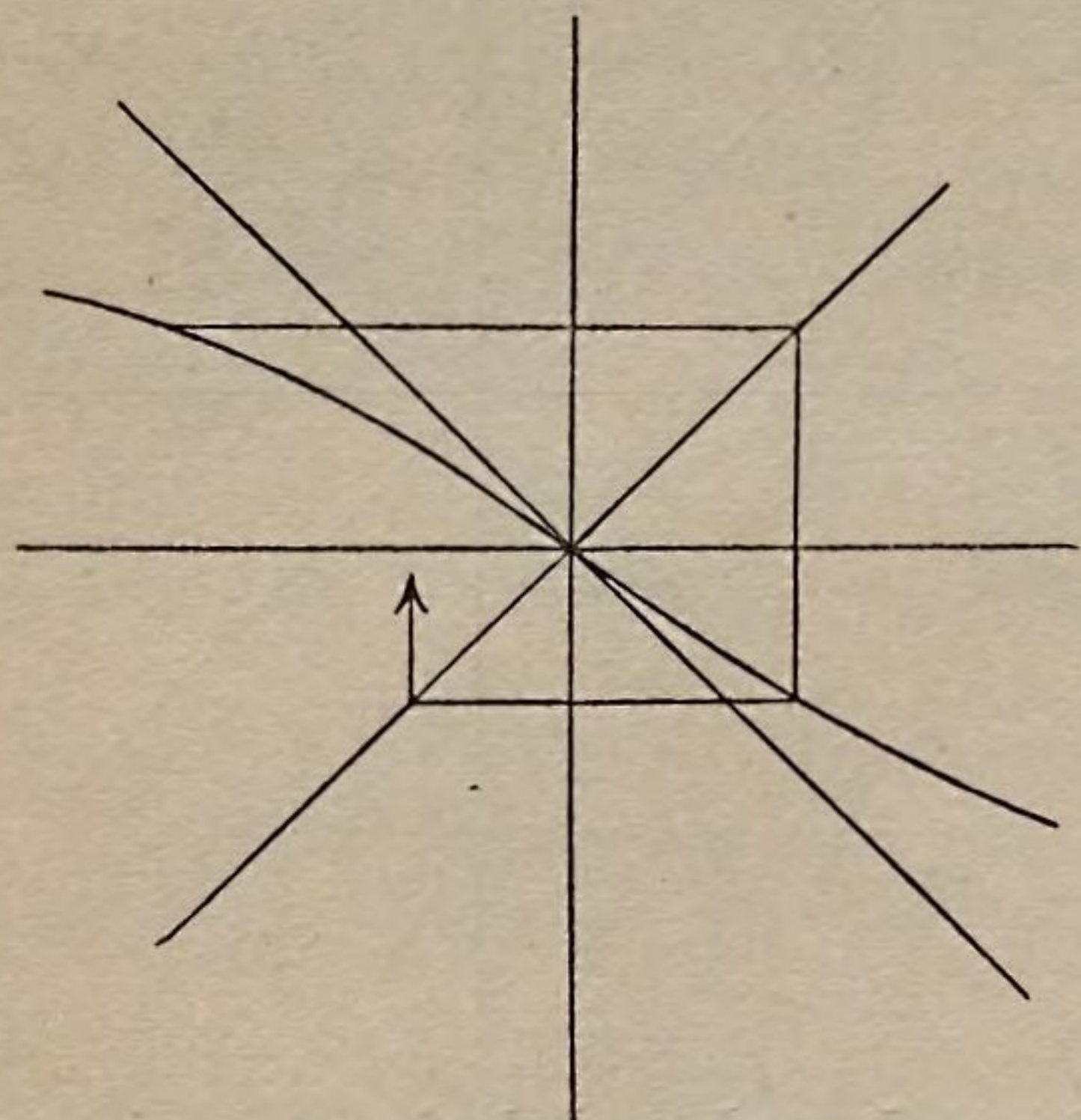
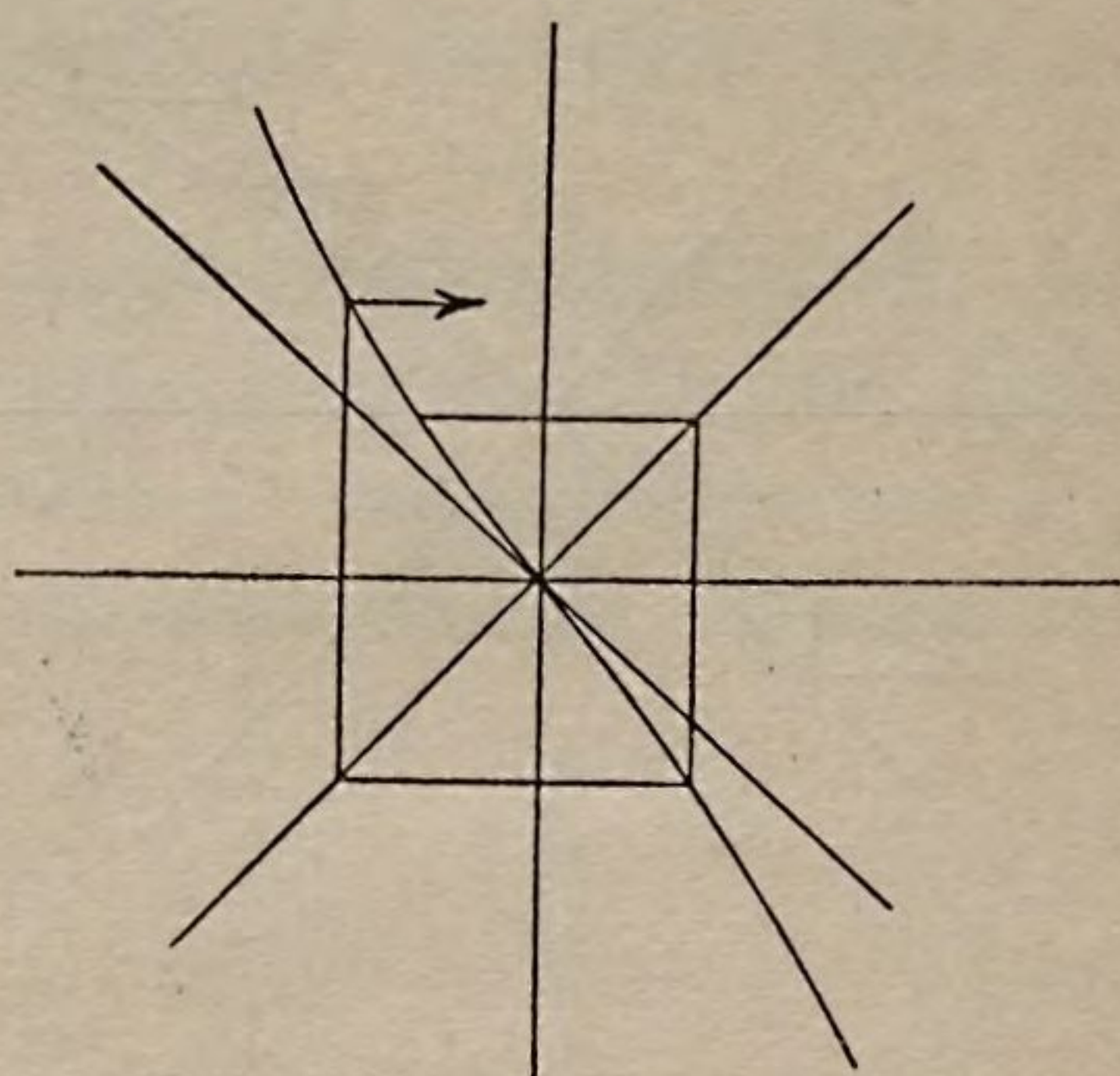


Fig. 23.



Bei den in Fig. 14 und 15 dargestellten Fällen geht $f''(x)$ im Punkte P_w nicht durch die Null. Dieselben sind schon in § 5 als zweifelhaft gekennzeichnet worden; wir können darüber aber doch, und zwar ohne Rechnung, einen Satz ableiten, welcher als Anwendung der Spiegelvorstellung interessant ist. —

In Fig. 24 sei AB die durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellte, durch den Wurzelpunkt P_w gehende Kurve; CD , ihr Spiegelbild, habe also nach § 4 die invertierte Gleichung $y = v(x)$. Dann ist der Fall denkbar, daß beide Kurven zusammenfallen. Wenn das aber geschieht, so findet, wie aus Fig. 25 sofort ersichtlich, weder Konvergenz noch Divergenz statt. Vier Brücken bilden ein genaues Quadrat, und

die Iteration führt von einer Ecke desselben zur gegenüberliegenden und wieder zurück.

Dieser Fall giebt sich sofort zu erkennen durch den Umstand, daß dann $f(x_1) = v(x_1)$ ist, gleichgültig, ob x_1 oberhalb oder unterhalb x_w gewählt ist. (Vgl. § 21.)

Fig. 24.

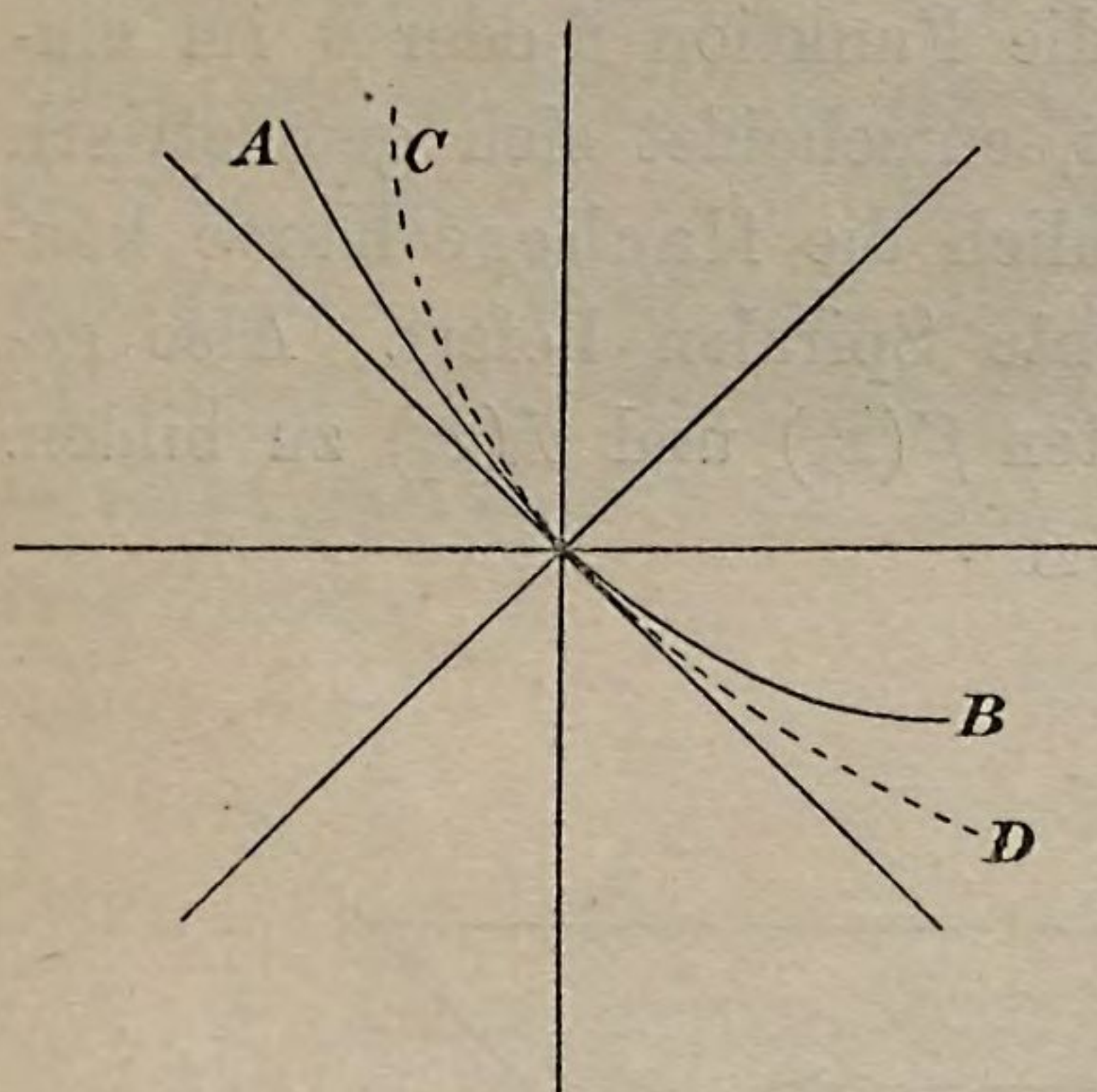
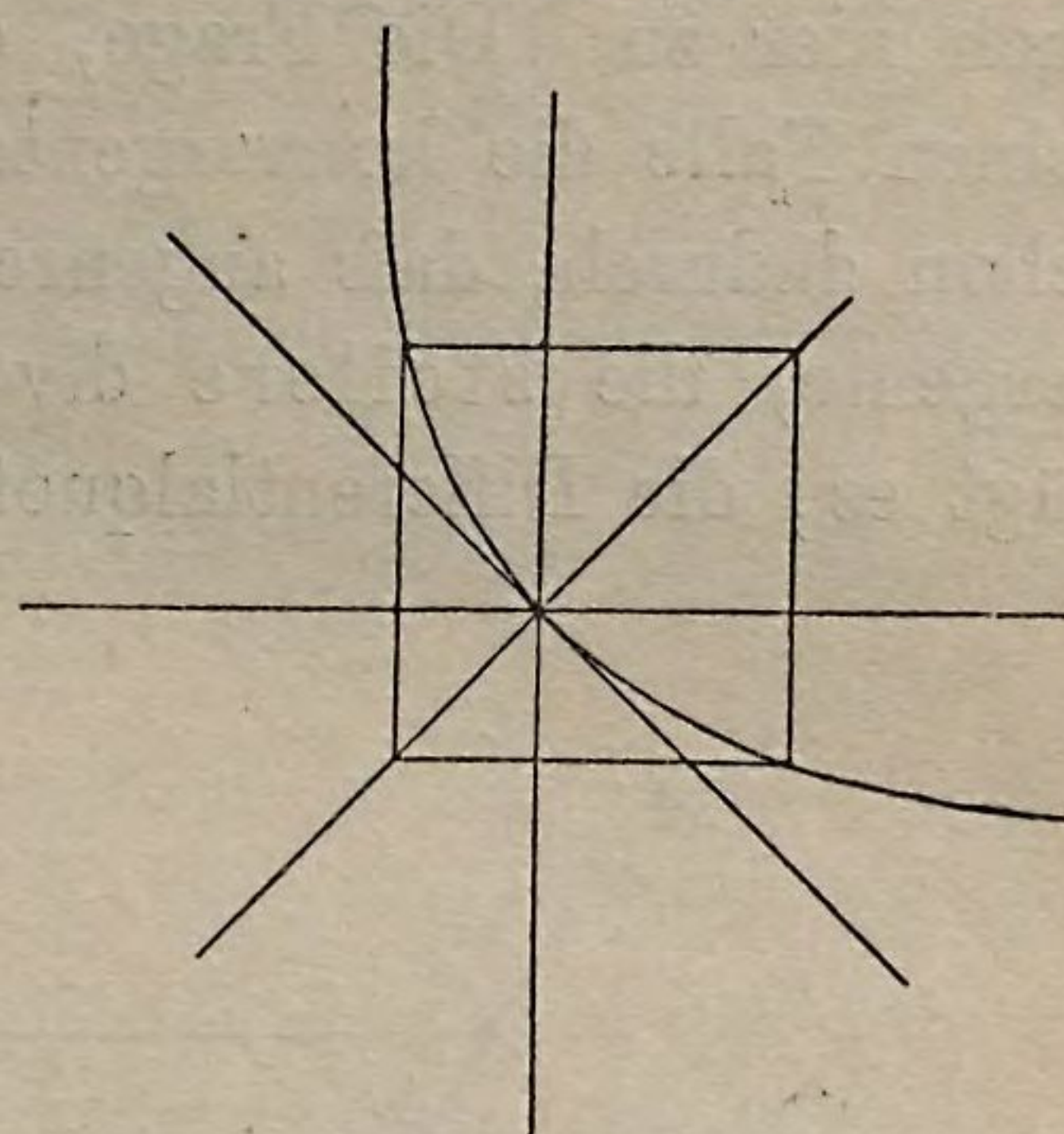


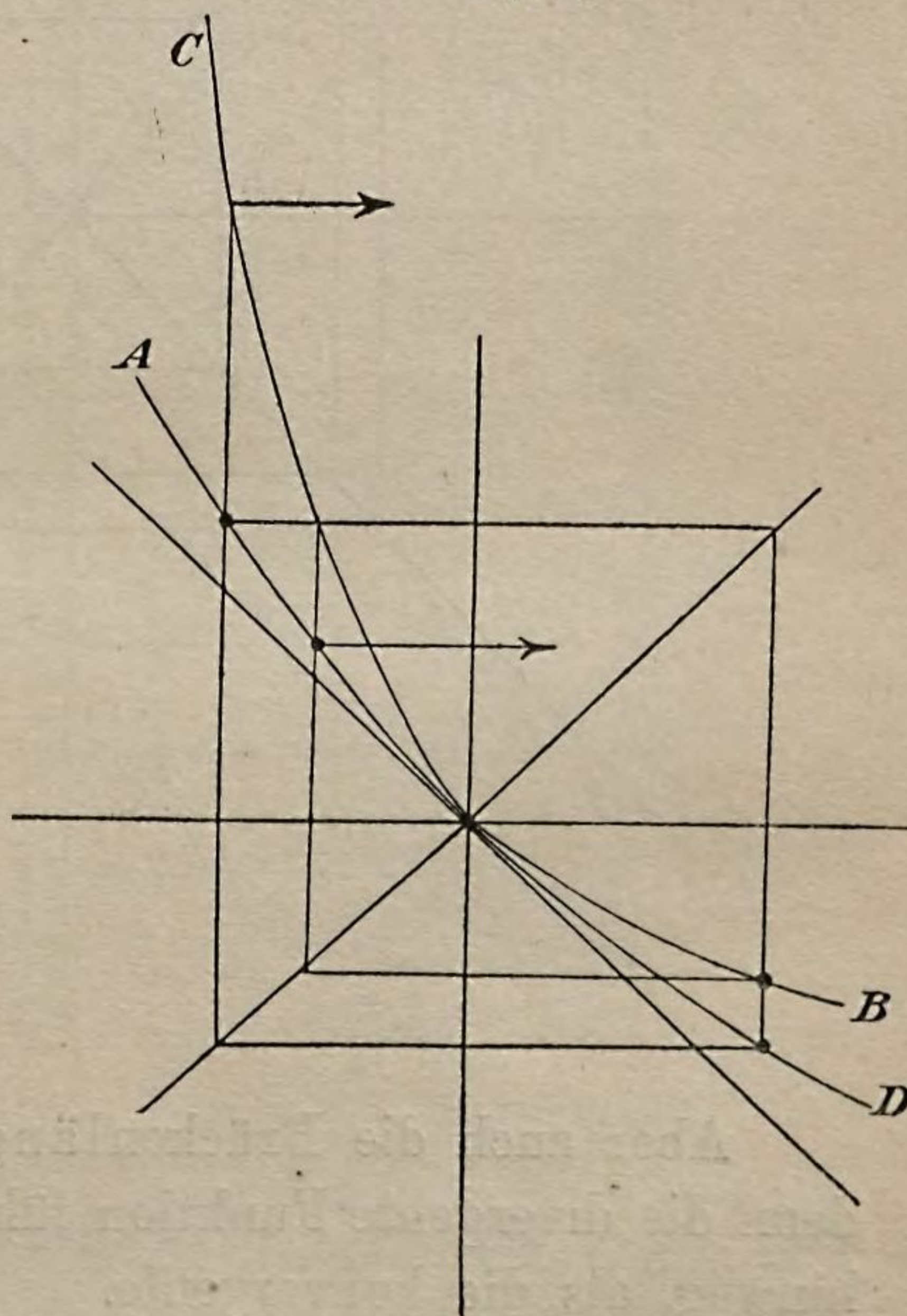
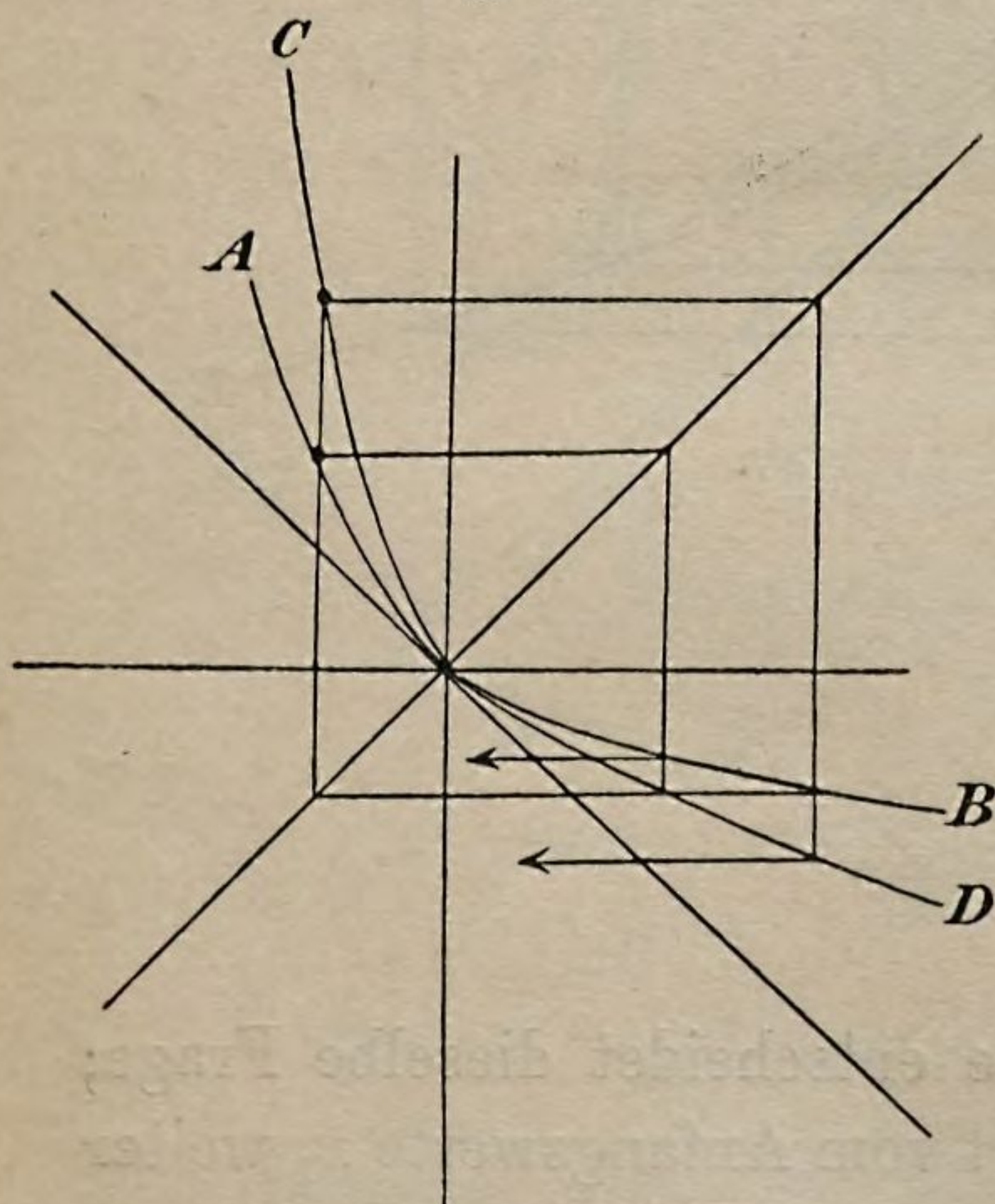
Fig. 25.



Ist aber $f(x_1)$ nicht gleich $v(x_1)$, so fallen beide Kurven nicht zusammen. Man kann dann vom Punkte $f(x_1)$ und auch

Fig. 27.

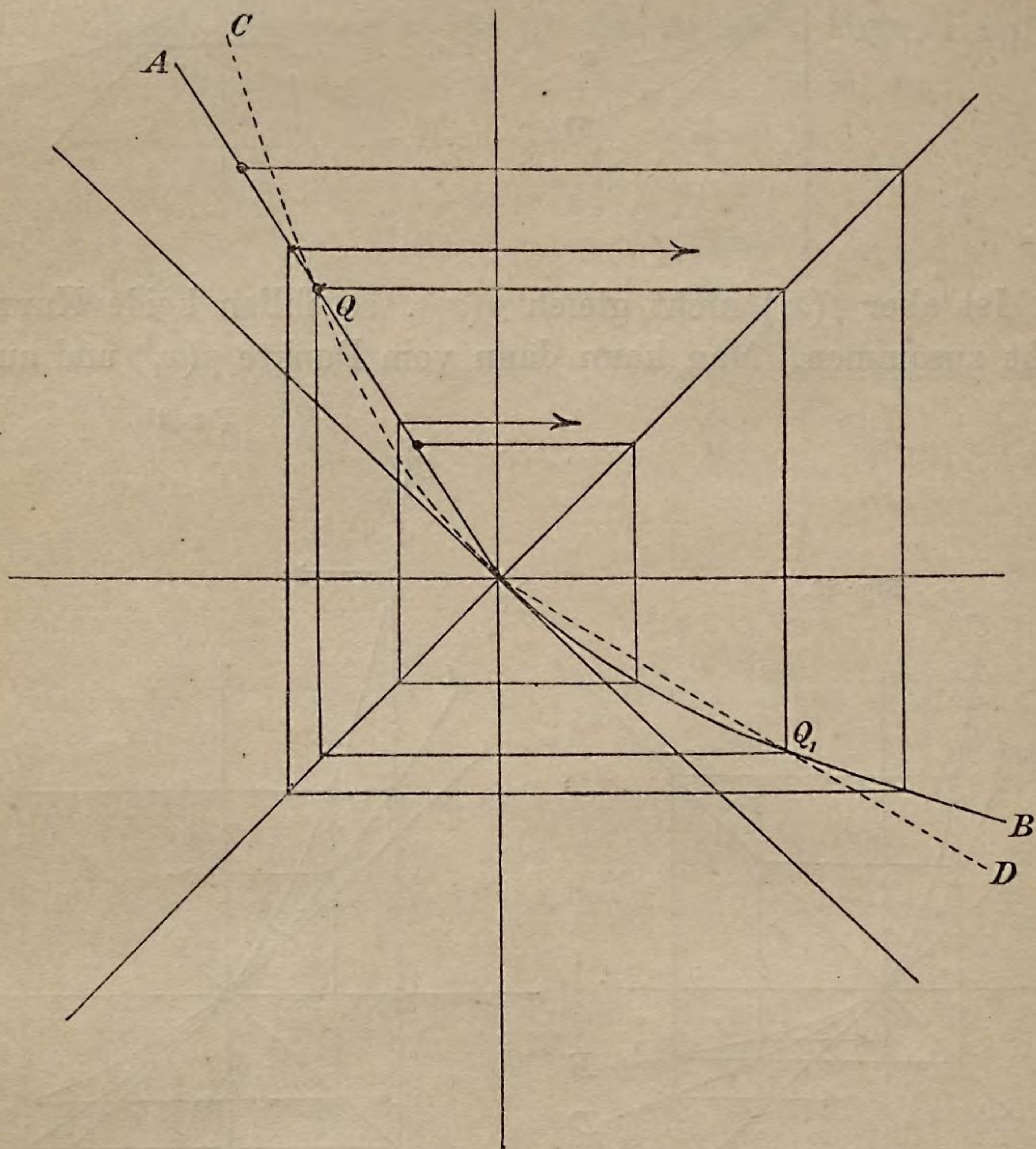
Fig. 26.



vom Punkte $v(x_1)$ aus ein Brückenquadrat bilden, und es zeigt sich in den Figuren 26 und 27 deutlich, daß die Spiralen entweder in ihr zugehöriges Quadrat hineinführen, also centripetal sind, oder aus ihrem Quadrat herausführen, also centrifugal sind.

Demnach trifft das in Lehrsatz IV der Einleitung Gesagte auch hier zu. Die Frage, ob die Funktion f oder v im einzelnen Falle die konvergente ist, entscheidet sich geometrisch schon dadurch, daß augenscheinlich die flachere Kurve konvergente, die steilere divergente Spiralen liefert. Also genügt es, die Differentialquotienten $f'(x_1)$ und $v'(x_1)$ zu bilden.

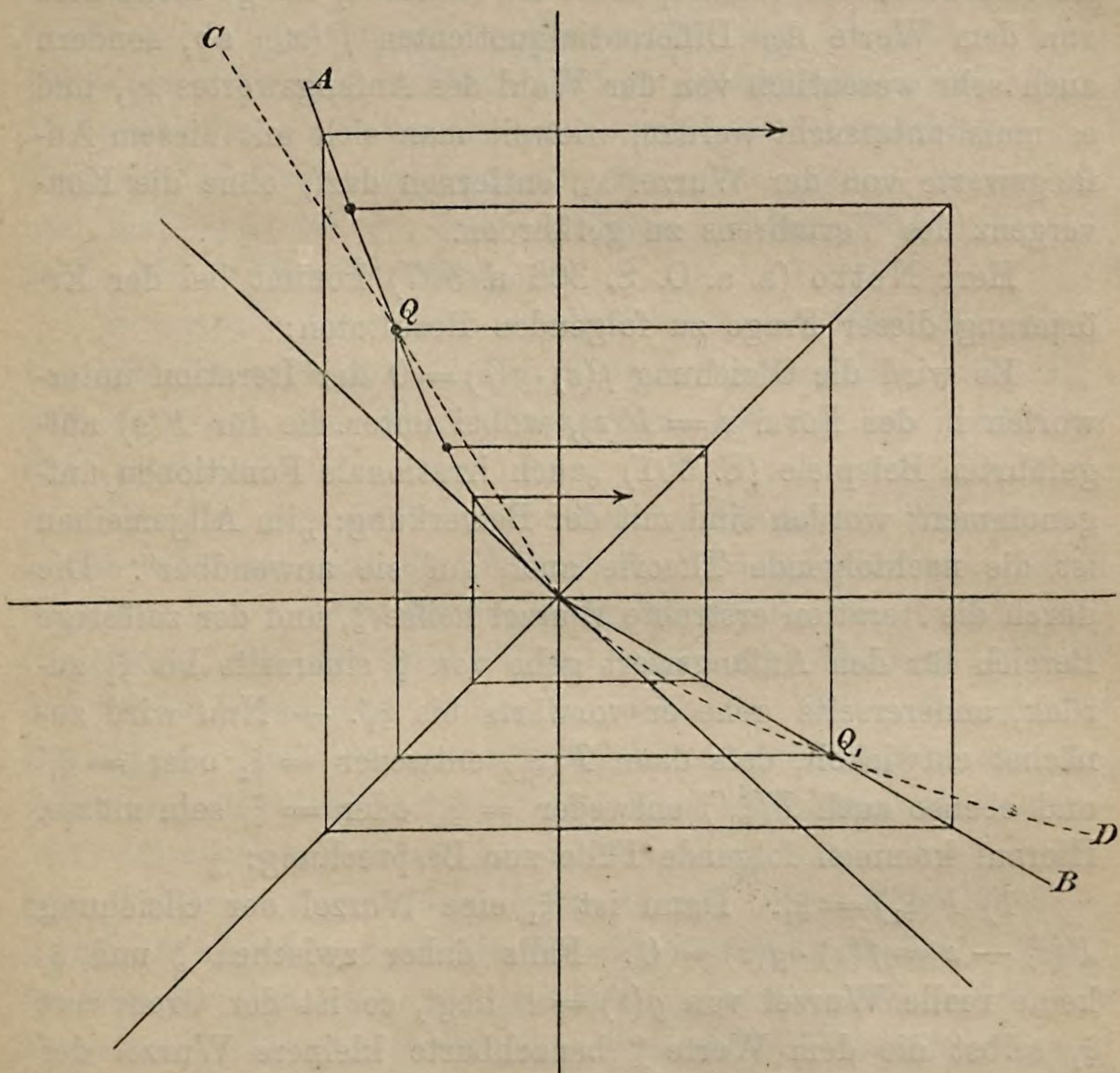
Fig. 28.



Aber auch die Brückenlänge entscheidet dieselbe Frage; denn die divergente Funktion führt vom Anfangswerte x_1 weiter hinweg, als die konvergente.

Noch bleibt eine Bemerkung übrig bezüglich des Falles, wo die Kurven AB und CD sich nicht blos im Wurzelpunkte P_ω , sondern in seiner Nachbarschaft noch einmal, etwa in Q und dessen Spiegelpunkte Q_1 schneiden; dann nämlich vertauschen sie dort ihre Rollen. — Hat AB aufserhalb der Kurvenstrecke QQ_1 die konvergente Iteration Fig. 28, so bildet das Quadrat mit den Gegenecken Q und Q_1 auch die Grenze, gegen welche die zugehörige Spirale asymptotisch konvergiert. Wählt man aber den Anfangspunkt dieser Spirale innerhalb der Kurvenstrecke QQ_1 , so läuft sie aus sich heraus und nähert sich nun demselben Quadrat asymptotisch von innen.

Fig. 29.



Hingegen wenn für die äufsere Strecke der Kurve AB Divergenz stattfindet (Fig. 29), so zeigt sich innerhalb ihres

durch Q und Q_1 begrenzten Quadrates Konvergenz auf den Wurzelpunkt P_ω hin.

Für die Spiegelkurve CD gilt genau dasselbe. Als besonders wesentlich muß hier die Thatsache betont werden, daß die Kurve und ihr Spiegelbild im vorliegenden Falle da, wo sie sich durchkreuzen, den Besitz der konvergenten bez. divergenten Iteration gegeneinander austauschen.

V.

Zweite Bedingung für die Konvergenz der Funktionswiederholung.

§ 12. Ob die Iteration einer Funktion $f(x)$ konvergent ist und zu einem Wurzelpunkte P_ω hinführt, hängt nicht bloß von dem Werte des Differentialquotienten $f'(x_\omega)$ ab, sondern auch sehr wesentlich von der Wahl des Anfangswertes x_1 , und es muß untersucht werden, wie weit man sich mit diesem Anfangswerte von der Wurzel x_ω entfernen darf, ohne die Konvergenz des Verfahrens zu gefährden.

Herr Netto (a. a. O. S. 306 u. 307) kommt bei der Erörterung dieser Frage zu folgenden Resultaten:

Es wird die Gleichung $f(z) \cdot g(z) = 0$ der Iteration unterworfen in der Form $z = F(z)$, wobei unter die für $F(z)$ aufgeführten Beispiele (S. 301) „auch irrationale Funktionen aufgenommen“ worden sind mit der Bemerkung: „im Allgemeinen ist die nachfolgende Theorie auch auf sie anwendbar“. Die durch die Iteration erstrebte Wurzel heiße ξ , und der zulässige Bereich für den Anfangswert gehe von ξ einerseits bis ξ_1 zurück, andererseits gehe er vorwärts bis ξ_1' . — Nun wird zunächst entwickelt, daß dann $F(\xi_1)$ entweder $= \xi_1$ oder $= \xi_1'$ und ebenso auch $F(\xi_1')$ entweder $= \xi_1'$ oder $= \xi_1$ sein müsse. Hierauf kommen folgende Fälle zur Besprechung:

1) $F(\xi_1) = \xi_1$. Dann ist ξ_1 eine Wurzel der Gleichung $F(z) - z = f(z) \cdot g(z) = 0$. Falls daher zwischen ξ und ξ_1 keine reelle Wurzel von $g(z) = 0$ liegt, so ist der Grenzwert ξ_1 selbst die dem Werte ξ benachbarte kleinere Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$. — „Ist $F(z)$ eine ganze oder eine unecht gebrochene Funktion, dann ist die Möglichkeit vorhanden, daß ξ_1 den Wert $-\infty$ annimmt.“

2) $F(\xi_1) = \xi_1'$ und wiederum rückwärts $F(\xi_1') = \xi_1$. Dann sind ξ_1 und ξ_1' Wurzeln der Gleichung $F(F(z)) = z$, und zwar solche, die in der einfacheren Gleichung $F(z) = z$ noch nicht enthalten waren.

3) $F(\xi_1) = \xi_1'$ und sodann $F(\xi_1') = \xi_1'$. In diesem Falle ist ξ_1' entweder $= \infty$ oder eine Wurzel der Gleichung $g(z) = 0$. Ist $\xi_1' = \infty$, so muß $g(z)$ eine gebrochene Funktion sein, deren Nenner für $z = \xi_1$ verschwindet. Ist hingegen ξ_1' eine Wurzel von $g(z) = 0$, so ist ξ_1 eine davon verschiedene Wurzel der Gleichung $\xi_1' = F(z)$. —

Wir wollen nunmehr untersuchen, zu welchen Resultaten über diese Frage die geometrische Anschauung führt.

§ 13. Betrachten wir zuerst den Fall, wo ein Arm der Curve $y = f(x)$ vom Wurzelpunkte P_ω aus in den ersten Oktanten eintritt. — Wenn ersterer nirgendwo bis an die Grenzschenkel des letzteren herankommt, so ist und bleibt der Treppen-Zickzack centripetal, also darf dann x_1 bis $+\infty$ gehen, und man sieht sofort, daß in diesem Falle x_ω die größte reelle Wurzel der Gleichung ist.

Kommt die Kurve aber an die Grenzen des ersten Oktanten, so trifft sie entweder die Wurzelachse, oder die durch P_ω zur X-Achse gezogene Parallele. Nehmen wir zunächst das erstere an.

Der Ort, wo die Kurve auf ihrem Wege von P_ω aus im ersten Oktanten mit der Wurzelachse zuerst zusammentrifft, ist offenbar der nächst höhere Wurzelpunkt der eben erwähnten Gleichung, also der Punkt $P_{\omega+1}$, und seine Abscisse ist mit der vorhin benutzten Gröfse ξ_1' identisch. Wird diese zum Anfang der Iteration gewählt, so kann die Iteration auf ξ_1' verharren und dann entsteht gar kein Zickzack, also auch kein centripetaler von $P_{\omega+1}$ nach P_ω hin. Trotzdem ist es noch keineswegs gestattet, diesen Wert ξ_1' ohne Einschränkung als eine obere Grenze für die Wahl des zulässigen Anfangswertes der nach x_ω gerichteten Iteration hinzustellen. Denn man ist auf Grund der gemachten Voraussetzungen weder völlig sicher, daß die Iteration für alle Werte von x zwischen x_ω und ξ_1 konvergent ist, noch darf man behaupten, daß jenseits von ξ_1' , und zwar auch im unmittelbaren An-

schlusse an diesen Wert keine nach x_w gerichtete konvergente Iteration möglich sei. Ja es ist sogar eine Iteration möglich, die von der Gröfse ξ_1' selbst ausgeht und doch nicht auf ξ_1' verharret, sondern in centripetalem Zickzack auf x_w hinausläuft. In diesem Falle können auch gröfsere Werte als ξ_1' noch eine konvergente Iteration nach x_w zulassen, und dann gibt es einen durch keine Unstetigkeit unterbrochenen Konvergenzbereich, der den Wert ξ_1' in sich hat, ohne dafs durch diesen die Konvergenz durchbrochen würde.

Das alles läfst die geometrische Betrachtung leicht erkennen.

Fig. 30.

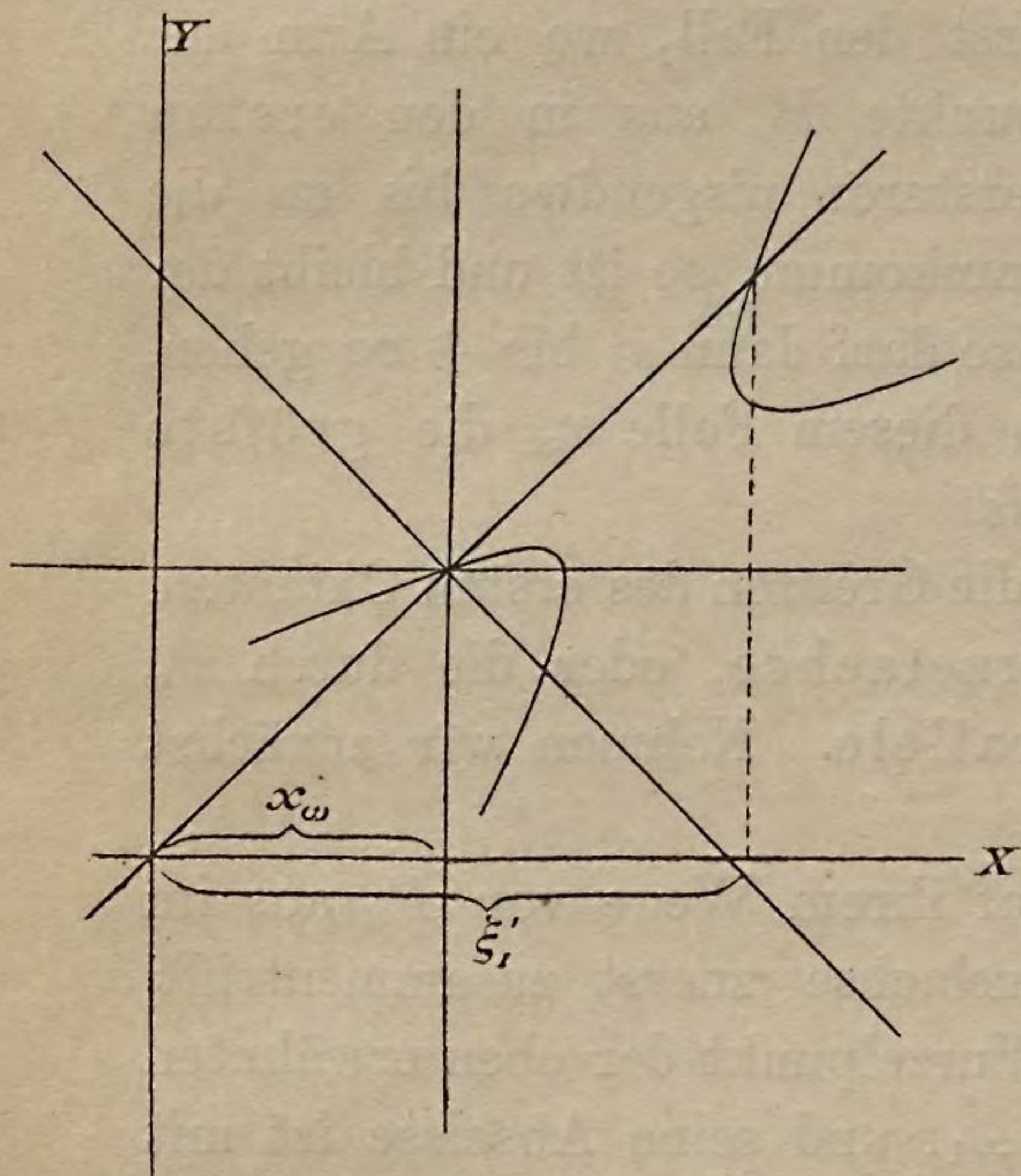
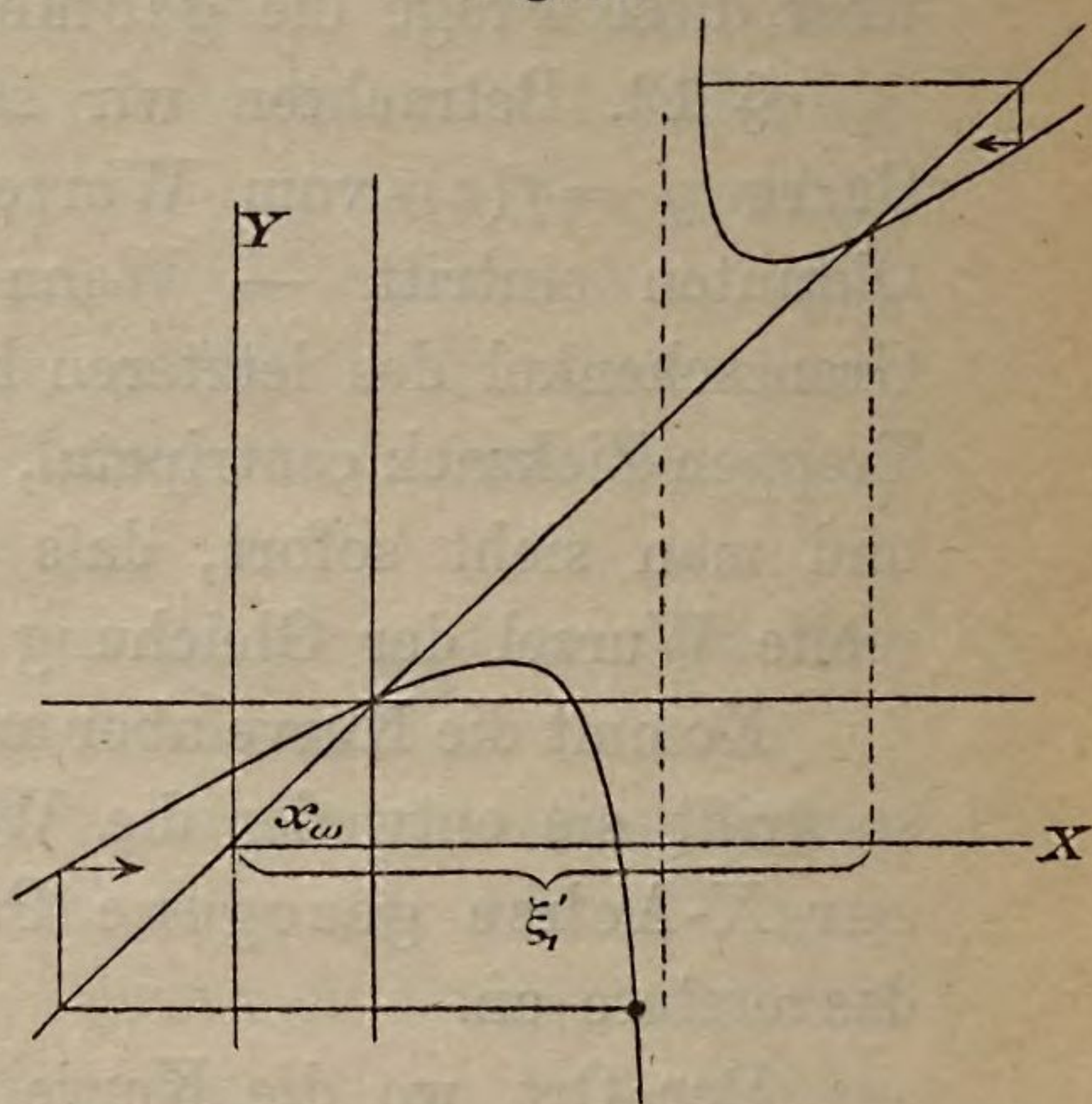


Fig. 31.



In Fig. 30 liegt zwischen x_w und ξ_1' ein gewisses Intervall, innerhalb dessen von Konvergenz keine Rede sein kann, weil $f(x)$ für jeden darin vorhandenen Wert von x komplex wird.

In Fig. 31 geht der Bereich der nach x_w konvergierenden Iteration von x_w nicht bis ξ_1' , sondern nur bis zur Unstetigkeitsstelle.

In Fig. 32 und 33 bleibt die Iteration nicht nur für alle Werte zwischen x_w und ξ_1' , sondern auch für alle Werte, die gröfser als ξ_1' sind, konvergent nach x_w gerichtet.

Fig. 32.

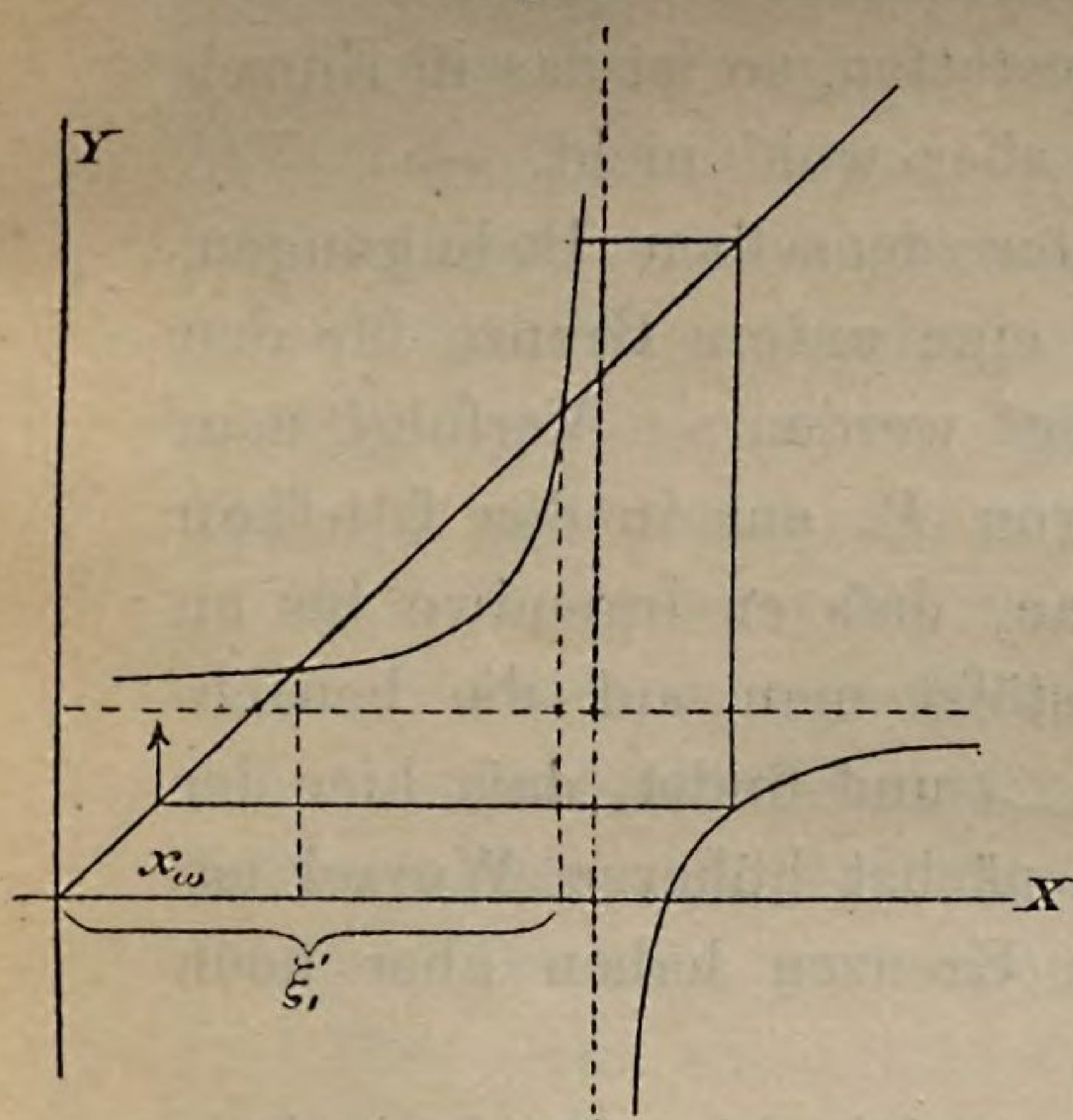
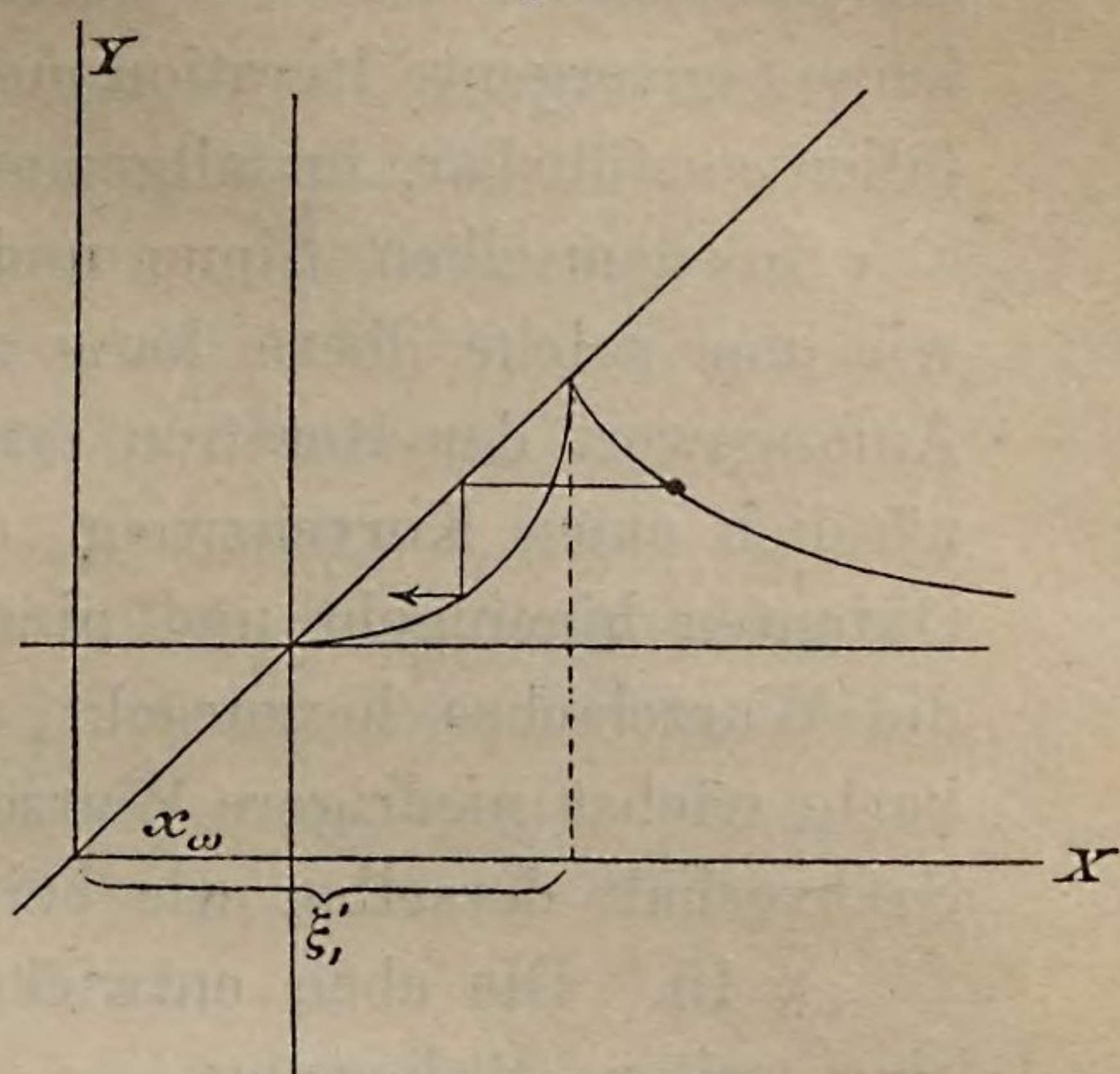
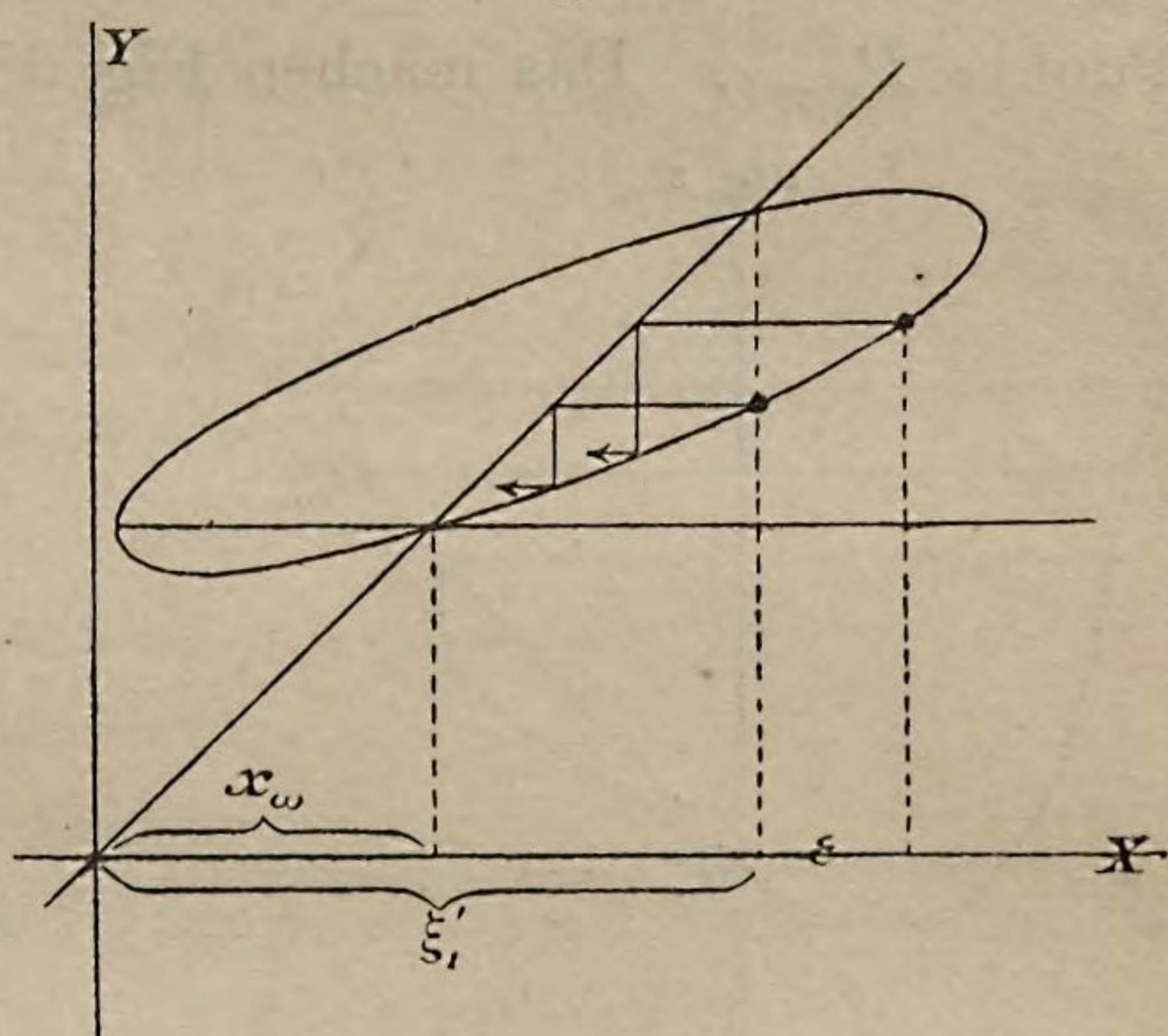


Fig. 33.



In Fig. 34 kann die Gröfse ξ'_1 selbst als Anfangswert einer Iteration dienen, die nach x_ω konvergiert; dasselbe gilt von $\xi'_1 + \varepsilon$. Eine Unterbrechung des Konvergenzbereichs findet durch ξ'_1 überhaupt nicht statt.

Fig. 34.



§ 14. Aus dem Vorigen geht hervor, daß man den Wert ξ'_1 , oder was dasselbe besagt, die nächst höhere reelle Wurzel der Gleichung $x = f(x)$ gar nicht als Grenze für den Anfangswert einer nach x_ω

konvergierenden Iteration hinstellen darf, ohne besondere Einschränkungen hinzuzufügen.

Will man aussagen, daß die Konvergenz vom Wurzelpunkte x_ω aus ohne Unterbrechung bis zum nächst höheren Wurzelpunkte sich erstrecke, so muß man in dem betreffenden Intervall jede Unstetigkeit ausschließen.

Will man aussagen, daß speziell der nächst höhere Wurzelpunkt selbst eine konvergente Iteration nicht mehr zulasse, so muß man alle mehrdeutigen Funktionen ausschließen.

Will man aber noch weiter gehen und aussagen, daß auch

die jenseits des nächst höheren Wurzelpunktes liegenden Werte keine konvergente Iteration mehr gestatten, so ist das in Einzelfällen ausführbar, im allgemeinen aber wohl nicht. —

In demselben Sinne und unter denselben Bedingungen, wie eine solche obere, kann auch eine untere Grenze für den Anfangswert der Iteration festgelegt werden. — Verfolgt man nämlich einen Kurvenzweig, der von P_w aus in den fünften Oktanten hineingeht und nimmt an, daß er irgendwo bis an die Wurzelachse heranrückt, so stößt man auf die benachbarte nächst niedrigere Wurzel x_{w-1} und findet, daß hier der Sachverhalt derselbe, wie bei der nächst höheren Wurzel ist.

§ 15. Die eben entwickelten Grenzen haben aber noch eine weitere Bedeutung.

Der Punkt P_{w+1} z. B. bestimmt nicht bloß für denjenigen Kurvenast, worauf er selber liegt, im angegebenen Sinne die Grenze für die Wahl des Anfangswertes, sondern je nach Umständen auch für den anderen Zweig. Ebenso ist es mit dem Punkte P_{w-1} . Das machen Fig. 35 und 36, in welchen durch

Fig. 35.

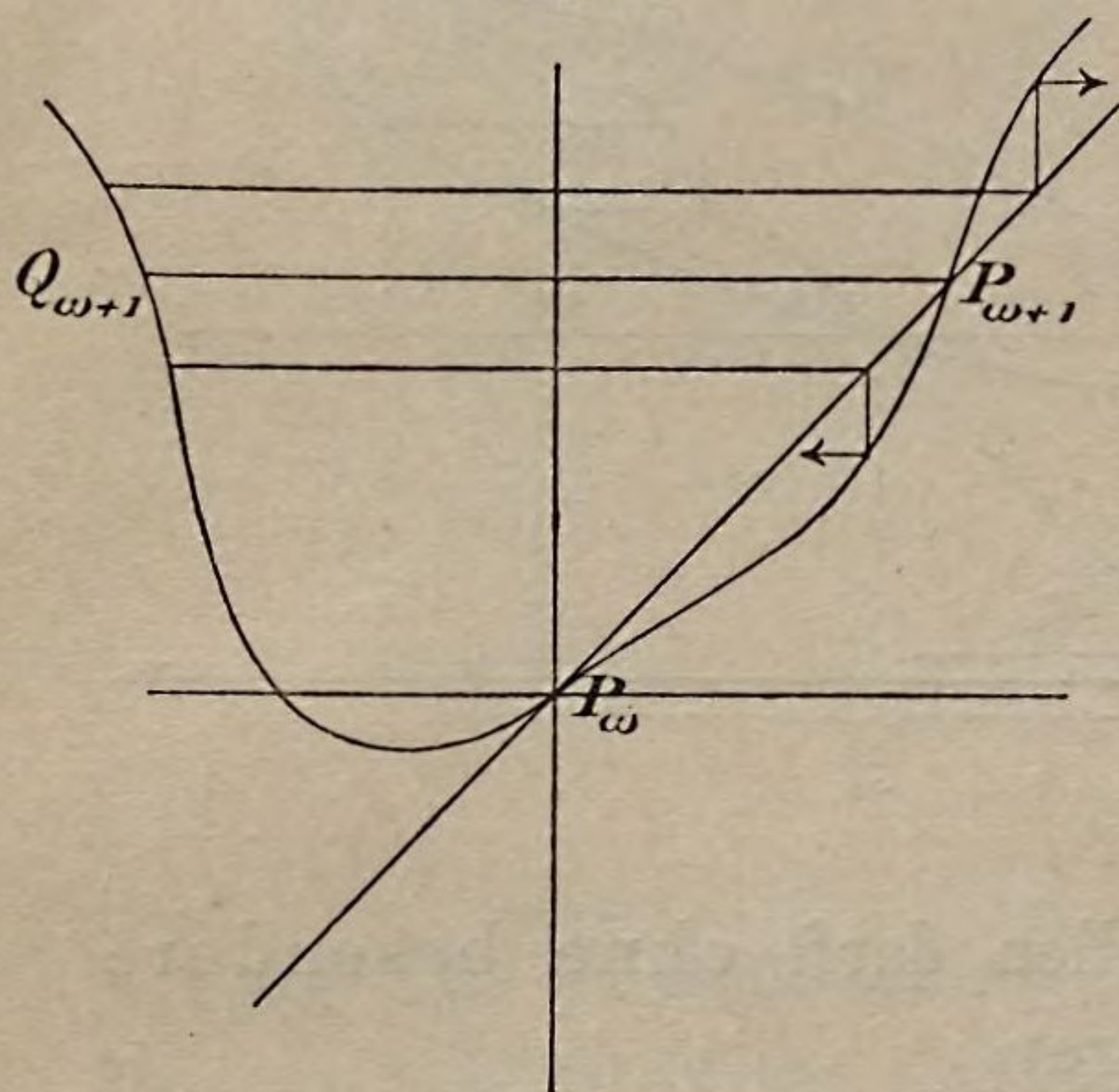
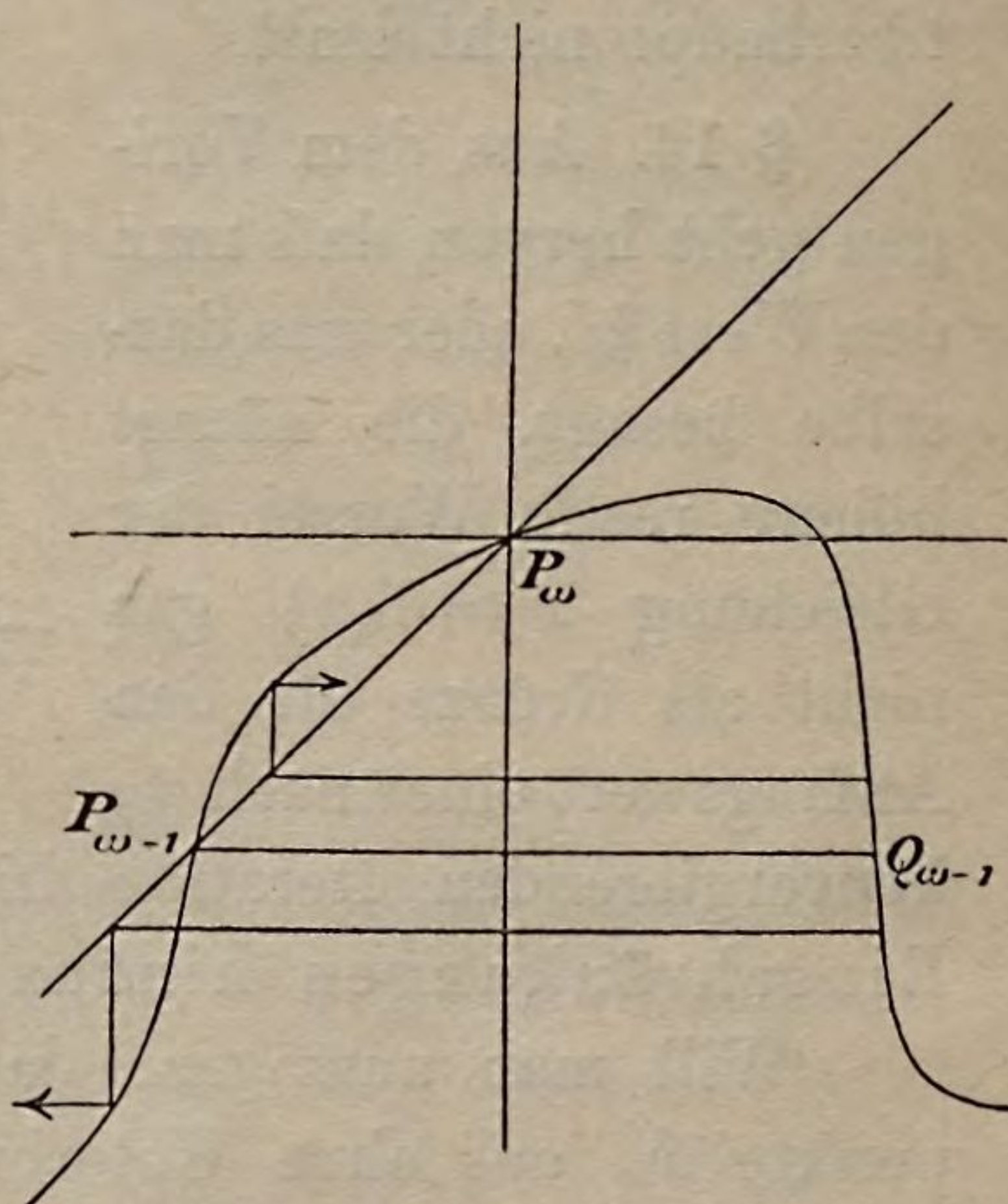


Fig. 36.



P_{w+1} bez. P_{w-1} Parallelen zur X-Achse gezogen sind, sofort anschaulich. Dort sind die Punkte, in welchen diese Parallelen den entgegengesetzten Ast treffen, mit Q_{w+1} und Q_{w-1} bezeichnet, und diese Punkte sind in demselben Betracht Konvergenzgrenzen, wie auch P_{w+1} und P_{w-1} .

Durch diese Parallelen ist also nach unten und nach oben ein Gebiet abgeschnitten, in welches (unter den nötigen Vorbehalten) die Konvergenz sich nicht hinein erstreckt. Innerhalb des zwischenliegenden Streifens findet aber auch eine sichere Konvergenz nur dann statt, wenn man auf keinen Unstetigkeitspunkt daselbst stößt oder auf andere Grenzen, die noch zu untersuchen sind.

§ 16. Nehmen wir jetzt die Betrachtung des § 13 wieder auf und setzen den Fall, daß die von P_ω aus in den ersten Oktanten eintretende Kurve nicht an die Wurzelachse anstofse, sondern an denjenigen Schenkel, den der erste mit dem achten Oktanten gemeinschaftlich hat.

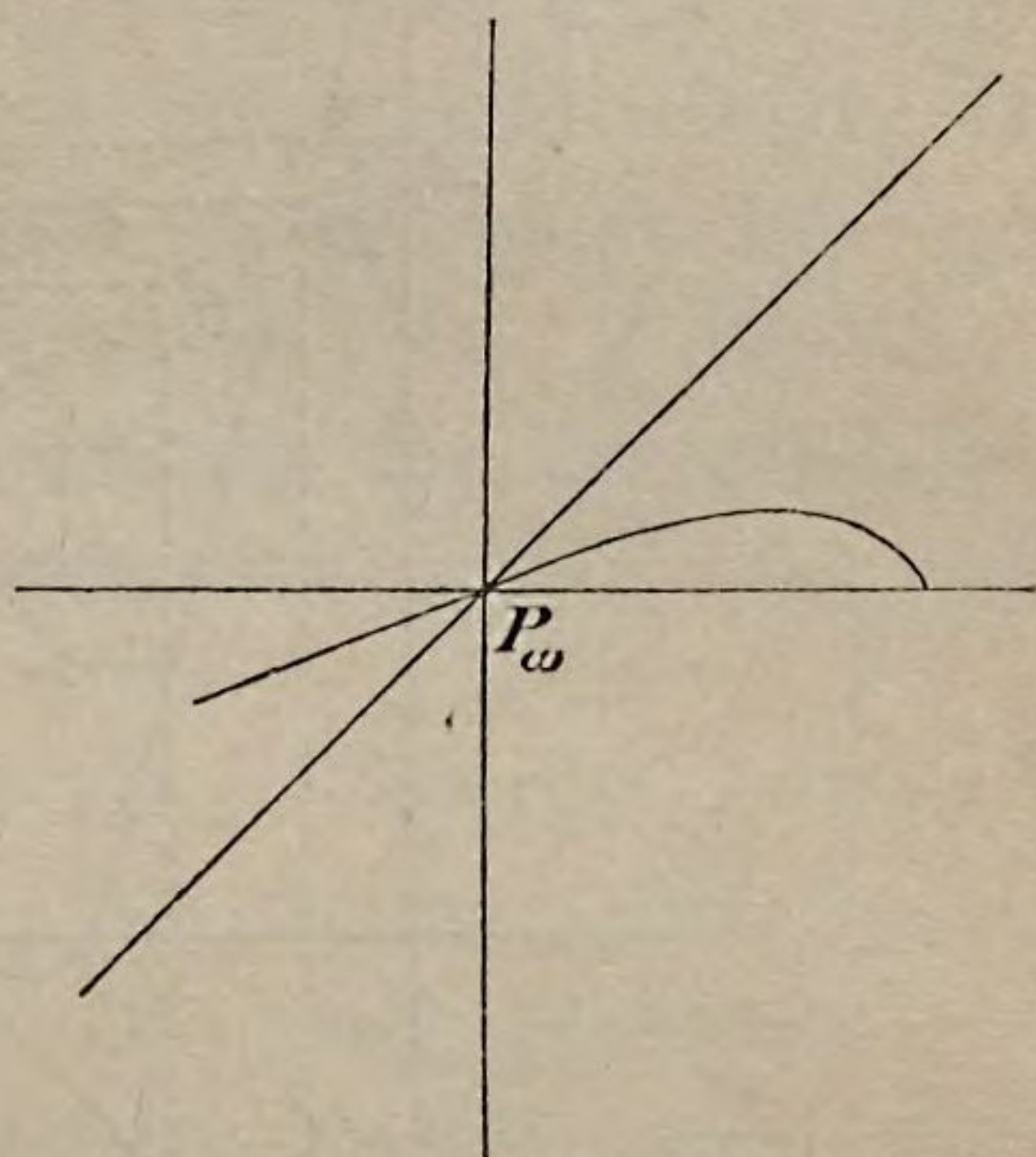
Man sieht leicht aus Fig. 37, daß der Punkt, wo dieses Zusammentreffen stattfindet, für die Iteration der allergünstigste ist, weil die erste Brücke schon unmittelbar auf den Punkt P_ω hinführt.

Möge sodann die Kurve über diesen Punkt hinaus durch die Parallele zur X-Achse hindurch in den achten Oktanten eintreten. — Wählen wir dort einen beliebigen Punkt A und ziehen Brücken, dann trifft schon die zweite nicht mehr den Arm, von welchem die erste ausging, sondern sucht den gegenüberliegenden Kurventeil auf. Diesen kann sie aber im dritten, vierten, fünften oder sechsten Oktanten antreffen.

Nun möge hier gleich bemerkt werden, daß es für das Folgende gleichgültig ist, ob der Kurvenzweig, von dem wir ausgehen, aus dem ersten Oktanten in den achten eingedrungen ist, oder ob er sich in letzterem von vornherein schon befunden hat. Und da die in § 6 entwickelte Bedingung auch diesen Fall gestattet, so können wir ihn der Einfachheit wegen hier gleich hinzunehmen. —

Trifft die zweite Brücke den gegenüberliegenden Kurventeil im fünften oder sechsten Oktanten, so liegen die Fälle der Fig. 36 vor, und wir haben in dem Punkte $Q_{\omega+1}$ schon

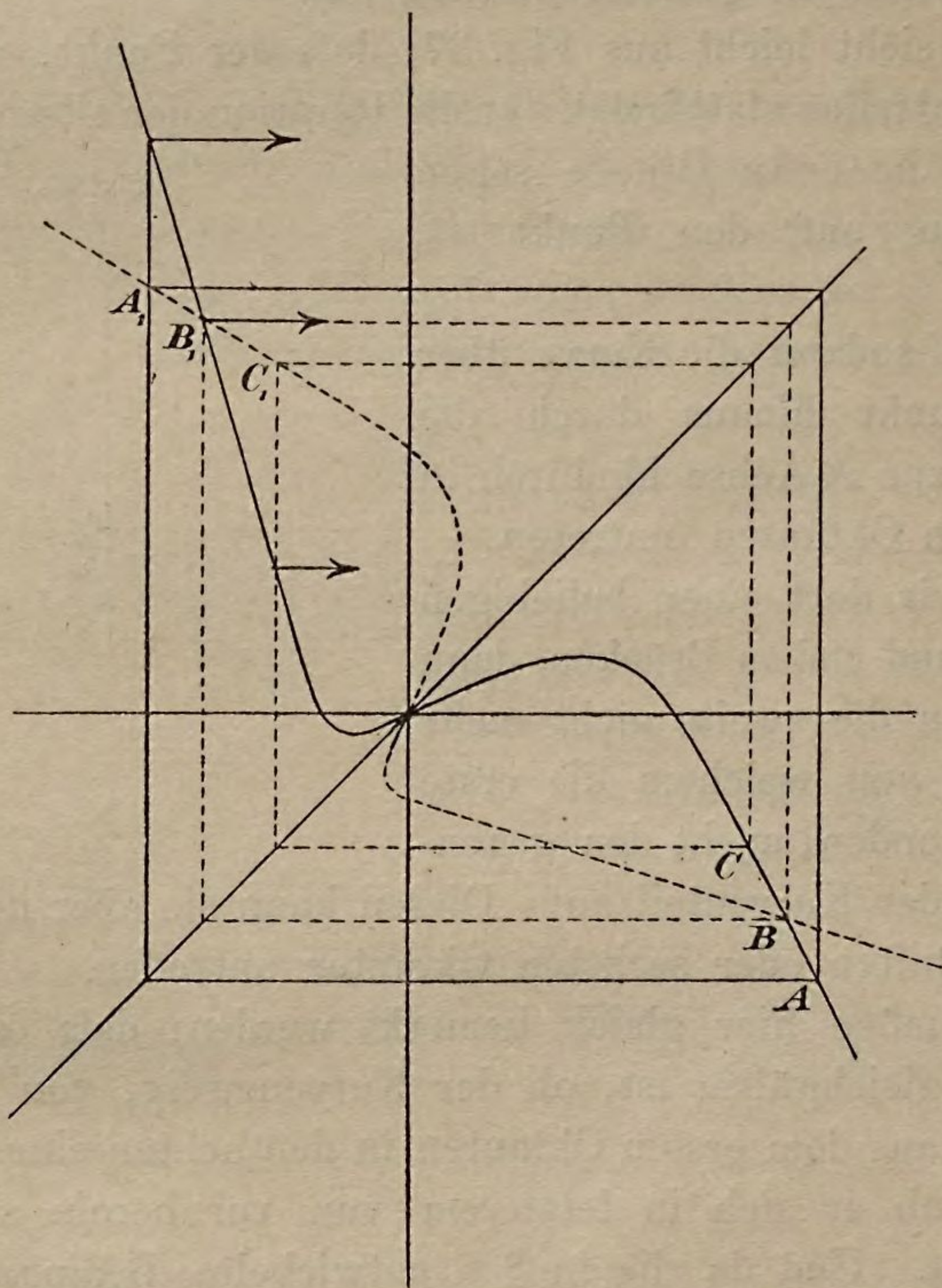
Fig. 37.



vorhin die Grenze gefunden, über welche A nicht hinaus gehen darf.

Um nun aber auch für die noch übrigen Fälle die Grenze zu bestimmen, zeichnen wir von A aus ein Quadrat so, daß die gegenüberliegende Ecke A_1 das Spiegelbild von A ist und daher auch auf dem in Figur 38 punktiert gezeichneten Spiegelbilde der ursprünglichen Curve liegen muß. Dieses Quadrat enthält den Wurzelpunkt P_w in sich und entscheidet die Konvergenzfrage sofort dadurch, daß die Brückenspirale entweder hinein, oder heraus, oder grade auf seiner Peripherie herumführt.

Fig. 38.



In Fig. 38 sind alle drei Fälle dargestellt. Die von A ausgehende Spirale führt von dem Quadrate weg und zeigt, daß die Grenze überschritten ist. Die von C ausgehende gestaltet sich centripetal; dort ist die Grenze noch nicht erreicht.

Die von B ausgehende aber führt auf dem Quadrate selbst herum und zeigt genau die Konvergenzgrenze an. Letztere bestimmt sich also durch den Punkt, wo die Kurve ihr Spiegelbild schneidet. —

Hiermit ist der geometrische Teil der Konvergenzfrage erledigt. Denn wenn wir auch noch im dritten oder vierten Oktanten die Iteration beginnen wollten, so würden sich augenscheinlich ganz dieselben Konvergenzgrenzen ergeben.

§ 17. Daher bleibt blos noch übrig, vorstehende Resultate in algebraischer Form darzustellen.

Bezüglich der Punkte $P_{\omega+1}$ und $P_{\omega-1}$ genügt es, daran zu erinnern, daß ihre Abscissen diejenigen beiden reellen Wurzeln der Gleichung $x = f(x)$ bezeichnen, welche der erstrebten Wurzel x_{ω} beiderseits benachbart sind.

Was die Punkte $Q_{\omega+1}$ und $Q_{\omega-1}$ betrifft, so braucht man in Fig. 35 und 36 sich nur noch das Spiegelbild der Kurve hinzuzudenken, um sofort zu sehen, daß die Spiegelpunkte von $Q_{\omega+1}$ und $Q_{\omega-1}$ mit den Punkten $P_{\omega+1}$ und $P_{\omega-1}$ dieselben Abscissen haben. Wenn also die Gleichung des Spiegelbildes $y = v(x)$ heißt, so sind die gesuchten Grenzwerte $v(x_{\omega+1})$ bez. $v(x_{\omega-1})$.

Und endlich die Punkte B und B_1 in Fig. 38 genügen, weil sie sowohl auf der Kurve $y = f(x)$ als auch auf ihrem Spiegelbilde $y = v(x)$ liegen, der Gleichung $f(x) = v(x)$. Dieser Gleichung aber genügen selbstverständlich auch alle anderen Punkte, an denen die Kurve mit ihrem Bilde zusammentrifft, also auch sämtliche Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $x = f(x)$. Daher läßt sich die Funktion $f(x) - v(x)$ — nach den nötigen Vorbereitungen — stets durch $x - f(x)$ ohne Rest dividieren, und dann sind die Grenzpunkte B und B_1 auch erhältlich durch die einfachere Gleichung, welche nach Vornahme dieser Division übrig bleibt.

Auch noch in anderen Formen, in denen die Funktion v nicht auftritt, lassen sich obige Gleichungen darstellen.

Weil nämlich f und v invers sind, so ist allgemein $f(v(z)) = z$. Also erhält man aus der Gleichung:

$$f(x) = v(x) \text{ auch } f(f(x)) = f(v(x)) = x \text{ oder } f_2(x) = x.$$

Wenn man ferner die Abscissen der Punkte Q_{w-1} und Q_{w+1} mit x_α und x_β bezeichnet, so erhält man aus den oben angegebenen Relationen:

$$x_\alpha = v(x_{w-1}) \text{ und } x_\beta = v(x_{w+1})$$

die Gleichungen:

$$f(x_\alpha) = x_{w-1} \text{ und } f(x_\beta) = x_{w+1}.$$

Nun ist zwar $x_{w-1} = f(x_{w-1})$ und $x_{w+1} = f(x_{w+1})$, also könnte man die Gleichung:

$$x_\alpha = v(x_{w-1}) \text{ auch schreiben } x_\alpha = v(f(x_{w-1})).$$

Wenn man aber aus der inversen Natur der Funktionen v und f jetzt schließen wollte $x_\alpha = x_{w-1}$, so würde das irrig sein. Denn obschon f als eindeutige Funktion vorausgesetzt worden, ist darum v natürlich keineswegs eindeutig. Vielmehr lehrt ein Blick auf Fig. 35 und 36 sofort, daß sie grade in dem Falle, um den es sich handelt, mindestens zwei Werte ergeben muß, von denen der eine x_α , wenn der andere x_{w-1} , der eine x_β , wenn der andere x_{w+1} ist.

VI.

Erste Anwendung des Verfahrens einfacher Funktionswiederholung. Bruchketten. Lösung der Aufgabe: Einen Kettenbruch von mehrgliedriger Periode in einen eingliedrigen zu verwandeln.

§ 18. Indem wir nun dazu übergehen, von den im Vorigen entwickelten Sätzen über die einfachste Form der Funktionswiederholung Anwendung auf einzelne algebraische Probleme zu machen, soll als erstes Beispiel gewählt werden der vielbenutzte Algorithmus der Kettenbrüche — die vielleicht richtiger „Bruchketten“ hießen, namentlich in Hinsicht auf die entsprechenden Algorithmen der Potenz- und Wurzelketten, welche zwar weniger benutzt werden, aber den Bruchketten eng verwandt sind und im Folgenden ebenfalls erörtert werden sollen. —

Gegeben sei die Gleichung:

$$1) \quad \alpha_0 + a_1 x + x^2 = 0.$$

§ 19. Alle algebraischen Fragen nun, welche sich an das vorliegende Bruchkettenproblem anschließen, lassen sich sofort erledigen, wenn man die Kurven $y = f(x)$ und $y = v(x)$ betrachtet.

Die Gleichung $y = f(x) = -a_1 - \frac{a_0}{x}$ drückt eine Hyperbel aus, von deren Asymptoten die eine mit der Y-Achse zusammenfällt, während die andere eine im Abstände $-a_1$ zur X-Achse gezogene Parallele ist. Sind a_0 und a_1 positiv, so hat die Kurve den Verlauf wie in Fig. 39, falls die Diskriminante $a_1^2 - 4a_0$ der Gleichung 1) negativ ist. In diesem Falle sind die Wurzeln komplex, kein Zweig der Kurve schneidet

Fig. 39.

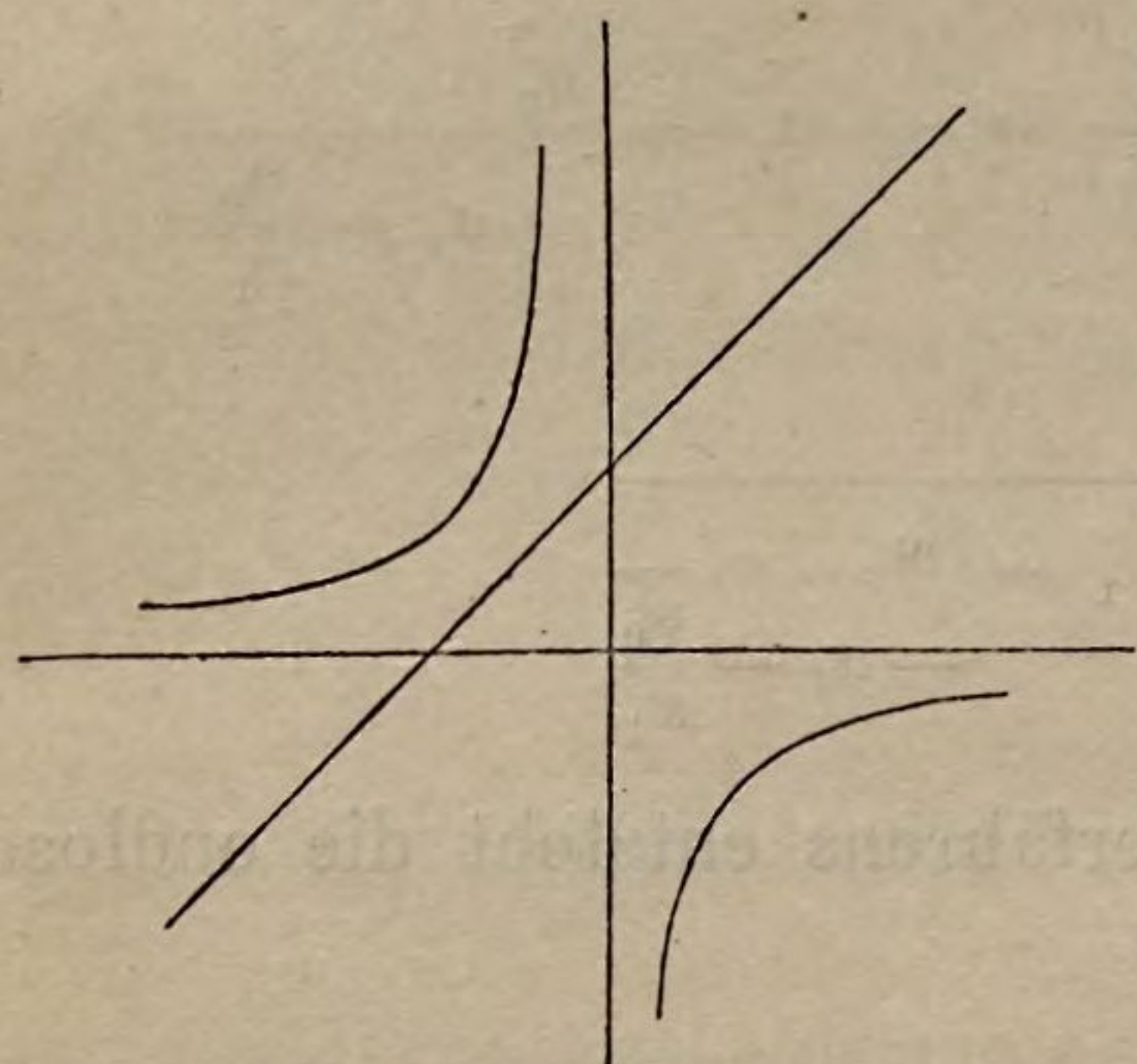
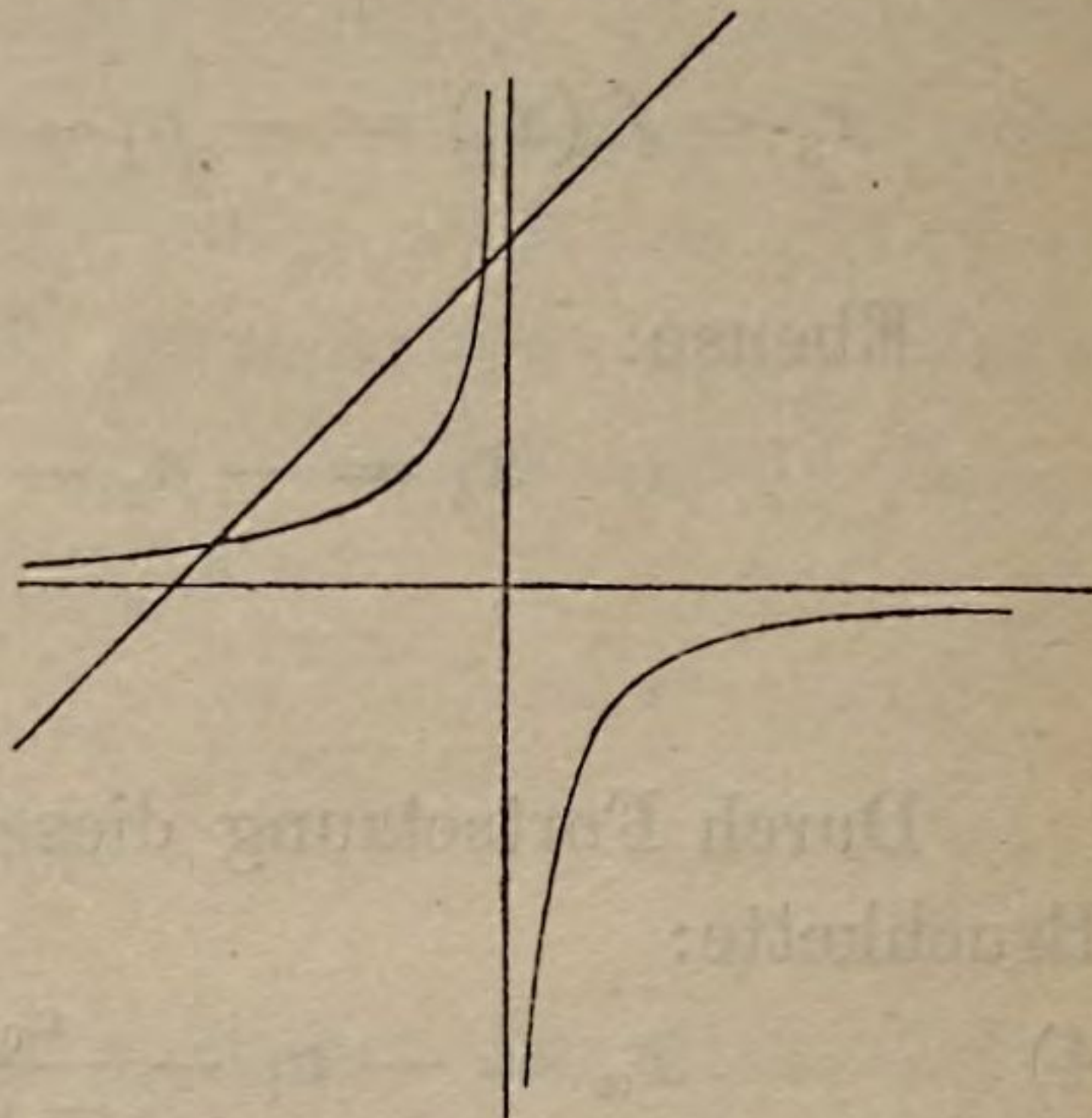


Fig. 40.



die Wurzelaxe. — Ist hingegen $a_1^2 - 4a_0$ positiv, so hat die Hyperbel den Verlauf wie in Fig. 40. Die Wurzeln sind reell und beide negativ. Die Iteration liefert diejenige von ihnen, deren absoluter Betrag der größere ist. Den Anfangswert kann man dabei zwischen $+\infty$ und $-\infty$ ganz beliebig wählen, den zweiten Wurzelpunkt ganz allein ausgenommen. Vgl. § 14.

Möglicherweise können die Annäherungen zu Anfang pendeln, immer aber werden sie am Schlusse einseitig sein; denn zuletzt kommt eine Treppe zustande, die von oben oder unten auf den Wurzelpunkt zustrebt.

Weil ∞ als Anfangswert dienen kann, ist es auch gestattet, das Schlußglied der Kette, welches $\frac{a_0}{x_1}$ heißt, einfach verschwinden zu lassen und die Kette ohne diesen Schluß abzubrechen. —

Nehmen wir den zweiten Fall, daß a_0 positiv und a_1 negativ ist, so hat die Hyperbel den Verlauf Fig. 41, wenn die Diskriminante negativ ist, sonst aber den Verlauf Fig. 42. Es liegen dann beide Wurzeln auf der positiven Seite.

Fig. 41.

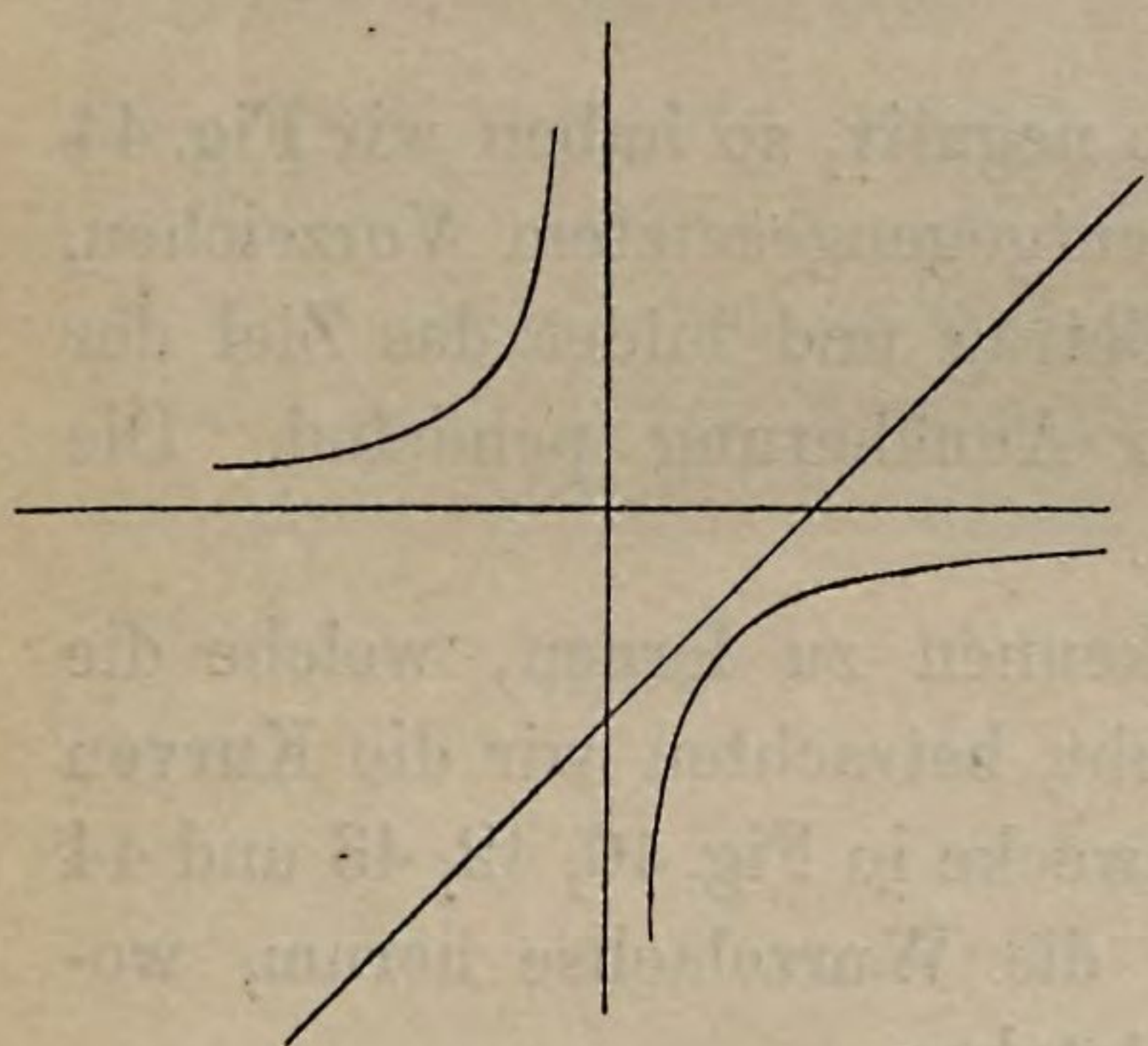
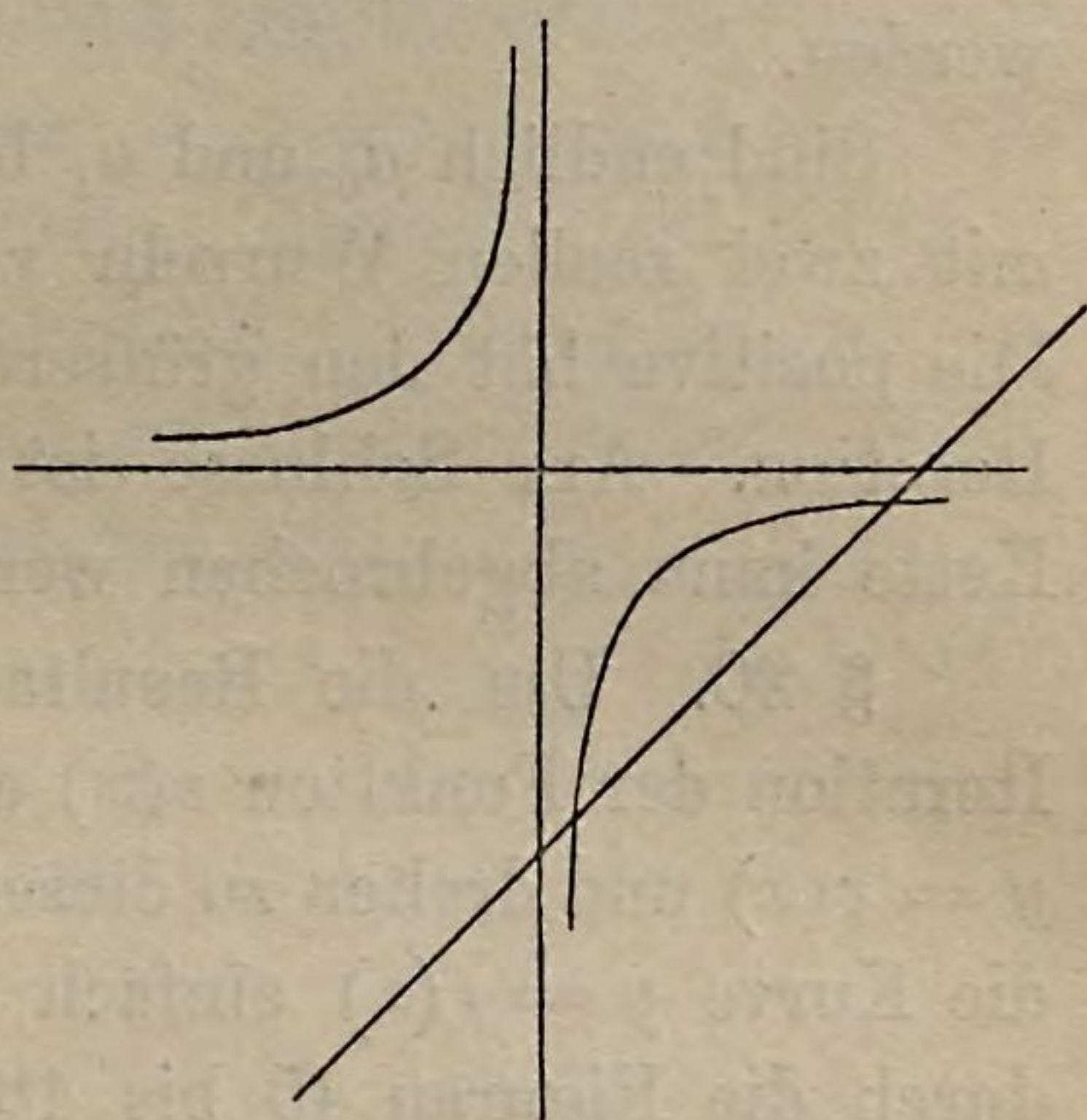


Fig. 42.



Die Iteration liefert wiederum die Wurzel des größeren Betrages, und der Anfangswert ist auch wieder vollkommen beliebig mit derselben einzigen Ausnahme wie vorhin. Die Iterationen können anfangs pendeln, am Ende aber ist die Annäherung stets einseitig. Die Kette kann auch hier wiederum aus dem eben entwickelten Grunde ohne Schlussglied bleiben.

Fig. 43.

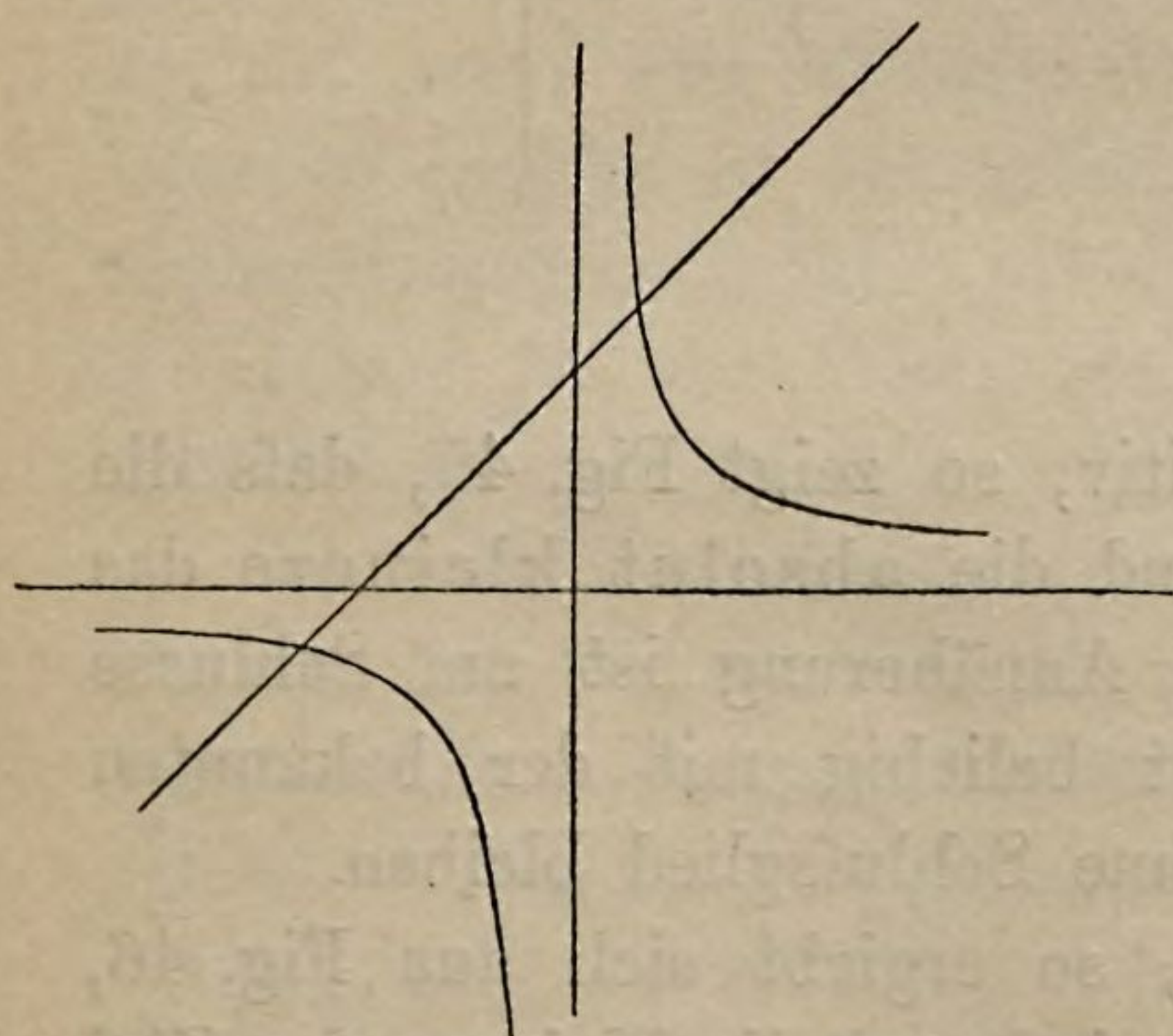
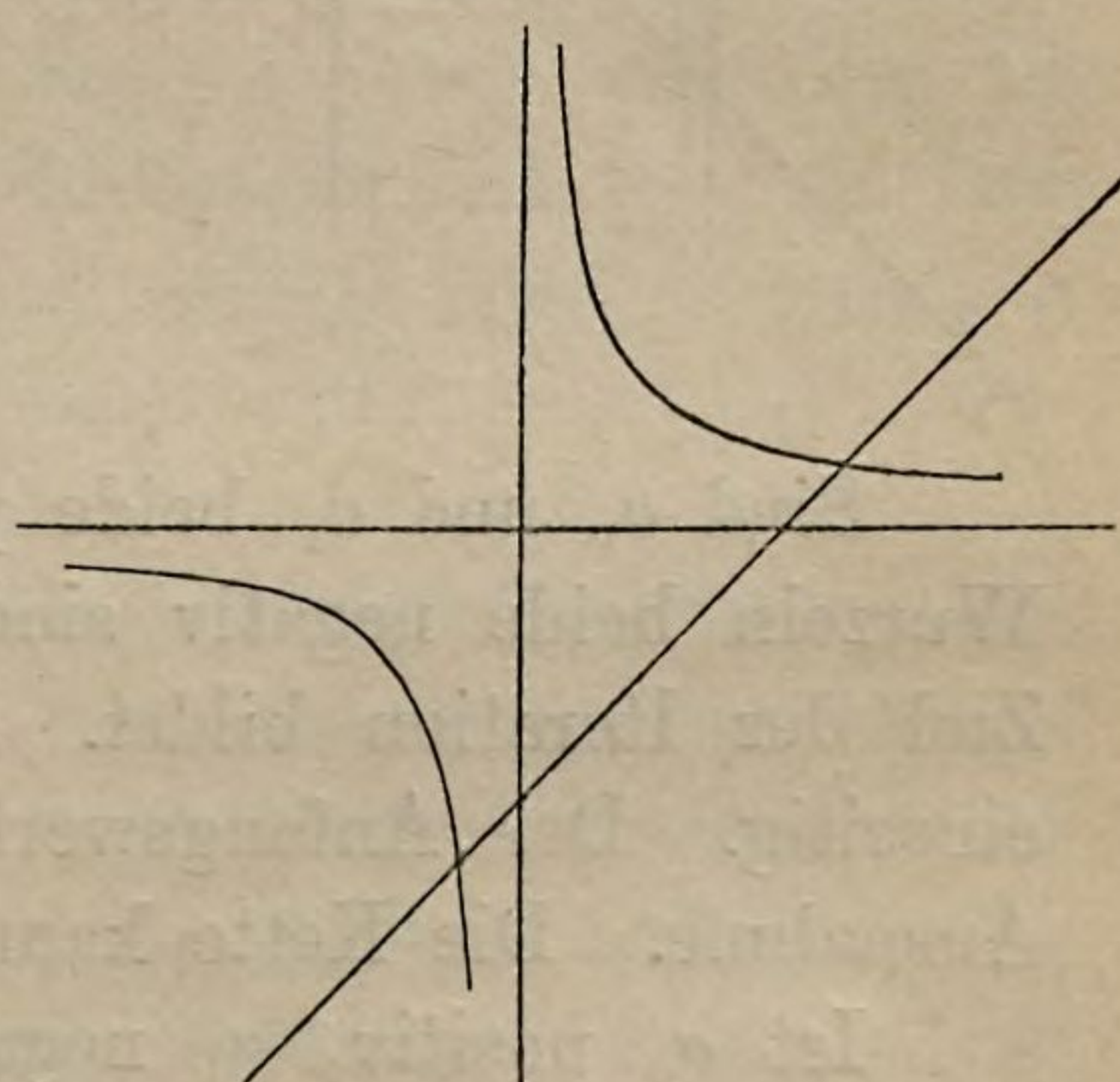


Fig. 44.



Ist drittens a_0 negativ und a_1 positiv, so haben wir die Hyperbel Fig. 43. Die Wurzeln sind dann in jedem Falle

reell. Sie besitzen entgegengesetztes Vorzeichen, und zwar hat die negative den absolut größeren Betrag. Diese ist es wiederum, welche durch die Iteration erzielt wird. Die Näherung kann zu Anfang möglicherweise einseitig sein, am Schlusse ist sie aber immer pendelnd. Die Kette kann auch abgebrochen werden.

Sind endlich a_0 und a_1 beide negativ, so haben wir Fig. 44 mit zwei reellen Wurzeln von entgegengesetztem Vorzeichen. Die positive hat den größeren Betrag und bildet das Ziel der Iteration. Am Schlusse ist die Annäherung pendelnd. Die Kette kann abgebrochen werden.

§ 20. Um die Resultate kennen zu lernen, welche die Iteration der Funktion $v(x)$ ergibt, betrachten wir die Kurven $y = v(x)$ und drehen zu diesem Zwecke in Fig. 40, 42, 43 und 44 die Kurve $y = f(x)$ einfach um die Wurzelachse herum, wodurch die Figuren 45 bis 48 entstehen.

Fig. 45.

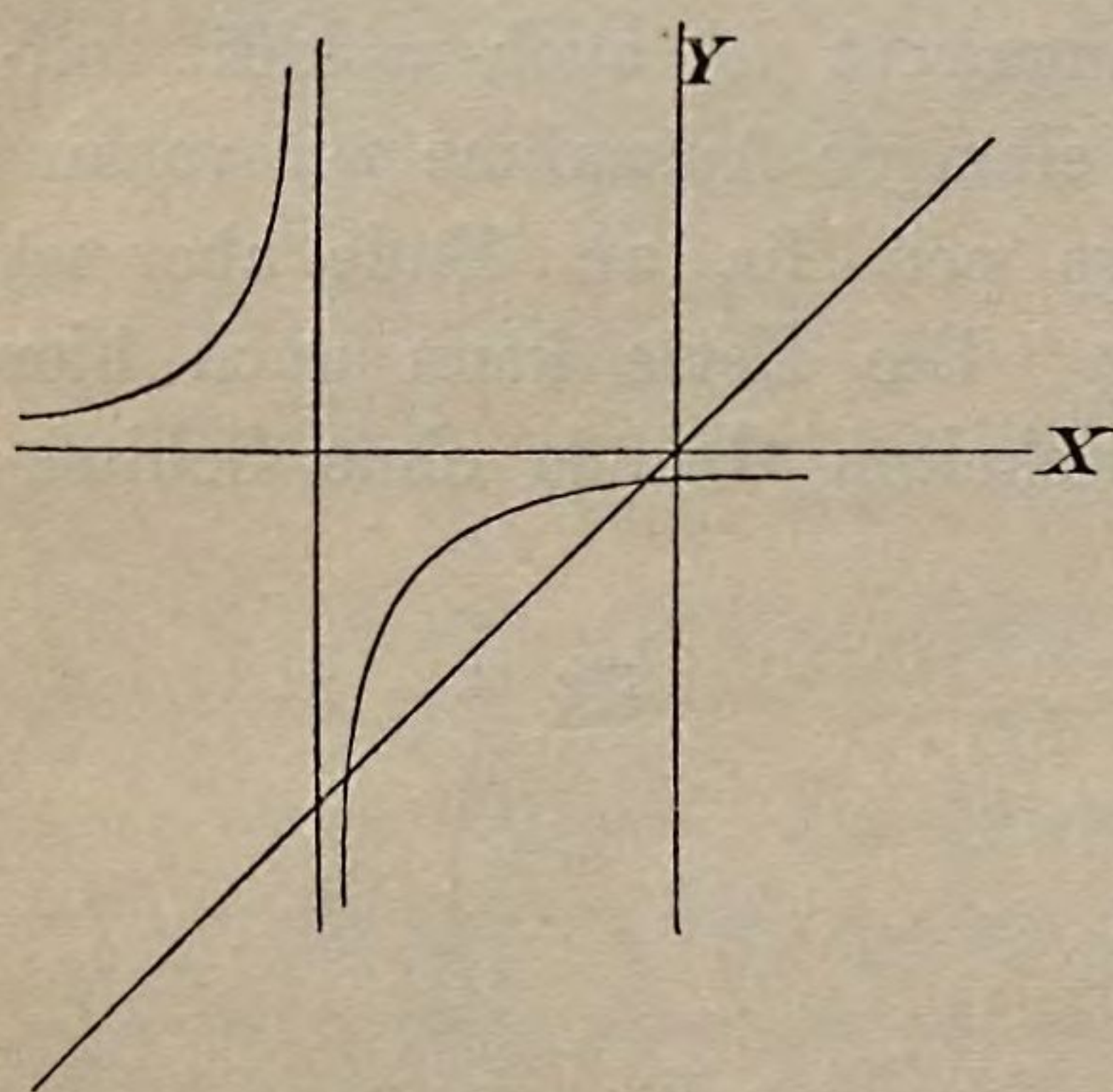
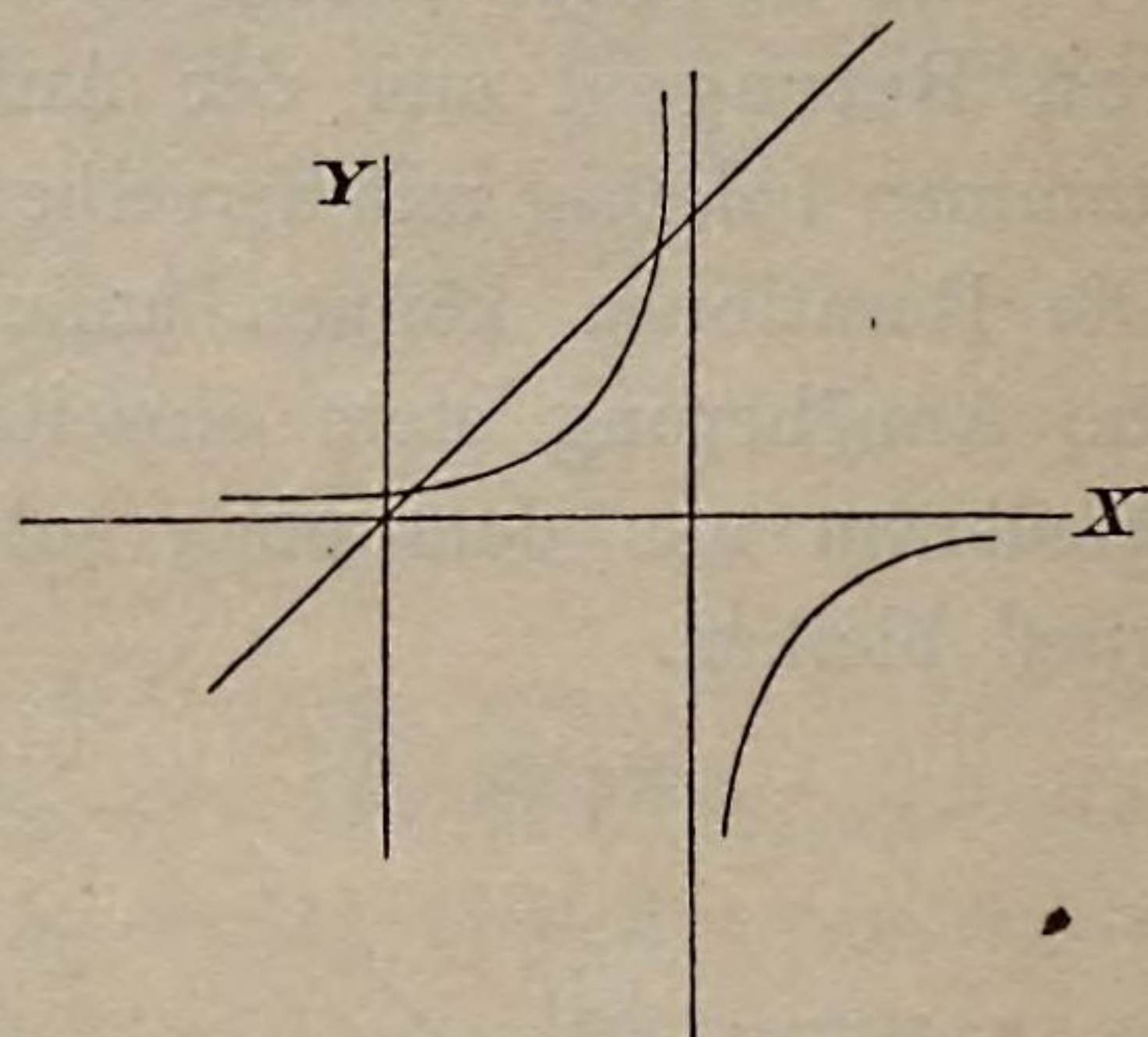


Fig. 46.



Sind a_0 und a_1 beide positiv, so zeigt Fig. 45, daß die Wurzeln beide negativ sind und die absolut kleinere das Ziel der Iteration bildet. Die Annäherung ist am Schlusse einseitig. Der Anfangswert ist beliebig mit der bekannten Ausnahme. Die Kette kann ohne Schlußglied bleiben.

Ist a_0 positiv, a_1 negativ, so ergibt sich aus Fig. 46, daß die Wurzeln beide positiv sind und die kleinere das Ziel bildet; auch sonst gilt dasselbe wie oben. — Selbstverständlich muß in diesen beiden letzten Fällen die Bedingung

$$a_1^2 - 4a_0 > 0$$

erfüllt sein, sonst würde die Wurzelachse von der Kurve ebenso, wie bei Fig. 39 und 41 gar nicht geschnitten werden.

Ist a_0 negativ und a_1 positiv, so ersieht man aus Fig. 47, daß das Ziel der Iteration die positive, absolut kleinere Wurzel ist. Sind hingegen sowohl a_0 wie a_1 negativ, so liefert die Iteration die negative, absolut kleinere Wurzel. Die Iteration ist in beiden Fällen zuletzt pendelnd. Als Anfang ist nur der zweite Wurzelwert ausgenommen, und die Bruchkette bedarf also des Schlußgliedes nicht. Fig. 48.

Fig. 47.

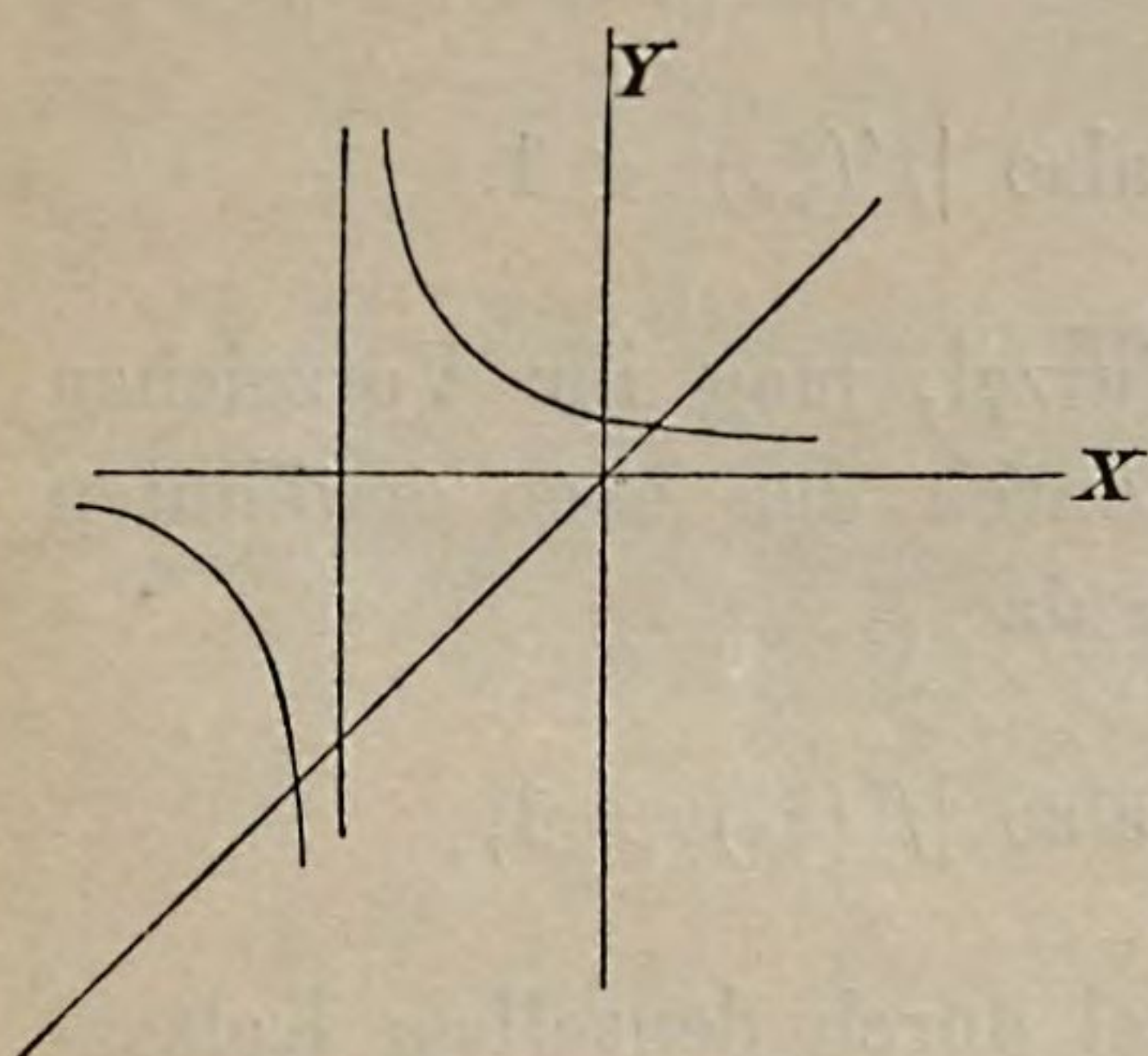
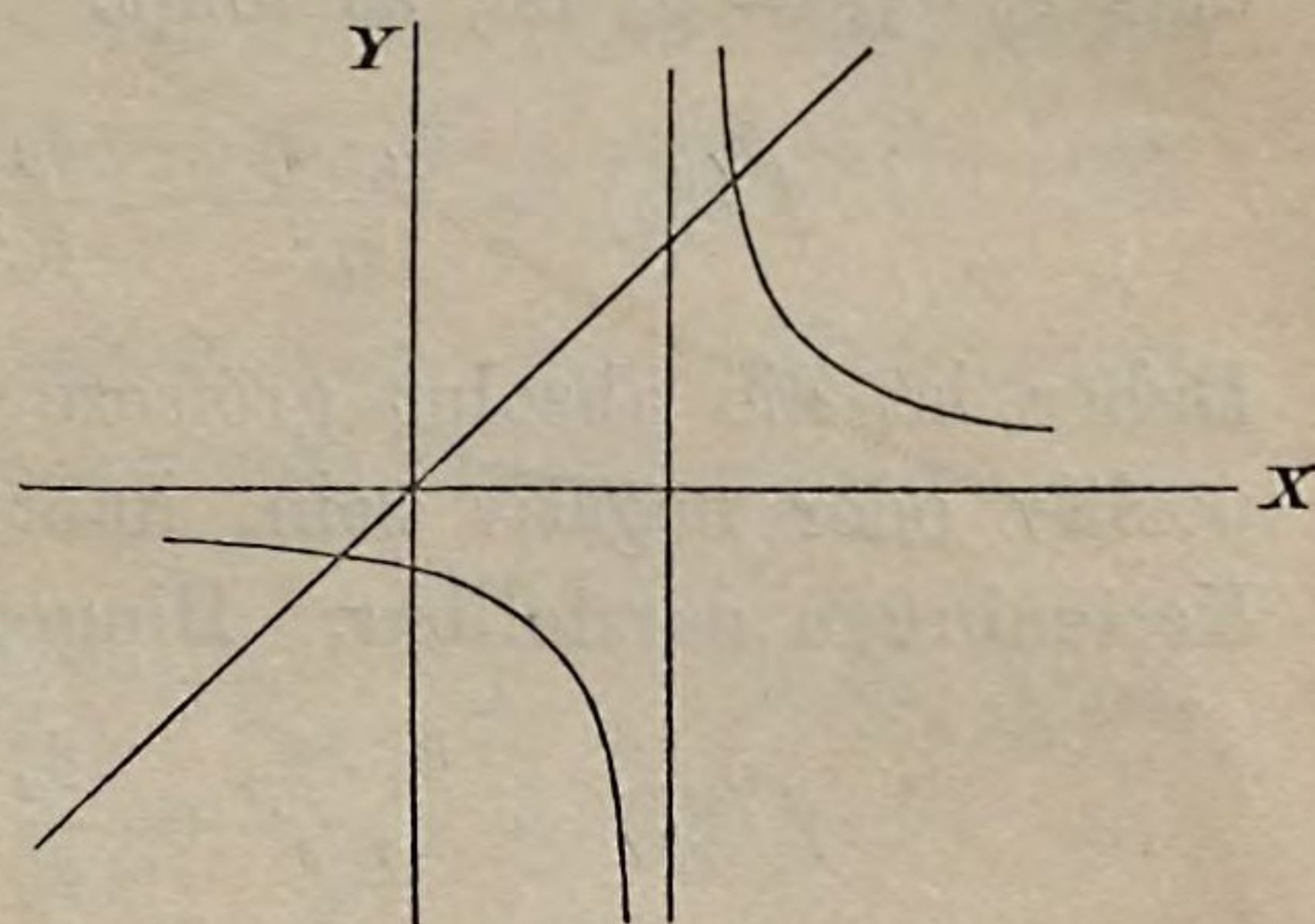


Fig. 48.



§ 21. Um nun noch den Ausnahmefall der Wurzelgleichheit zu besprechen, so sieht man sofort, daß derselbe eintritt, wenn Fig. 40 oder 46 in Fig. 18, sowie wenn Fig. 42 oder 45 in Fig. 19 übergehen. Dadurch ändert sich an dem vorhin Gesagten nichts, als daß die einzige noch vorhandene Ausnahme für die Wahl des Anfangswertes auch noch verschwindet.

Sind die Wurzeln entgegengesetzt gleich, so gehen die Figuren 43, 44, 47 und 48 über in einen Fall, der durch Fig. 25 schon dargestellt worden ist. Kurve und Spiegelbild fallen vollständig zusammen. Die Spirale, mag sie beginnen wo sie will, konvergiert nicht und divergiert nicht, sondern läuft fortwährend auf den Seiten eines Quadrats herum. In diesem Falle ist $a_1 = 0$, und aus den Gleichungen 2) und 3) des § 18 ergibt sich von selbst $f(x) = v(x)$. Vgl. § 11.

§ 22. Alle Sätze über die Bruchketten haben wir bisher ohne jede Rechnung aus der Figur unmittelbar abgelesen. Die algebraische Untersuchung der Aufgabe führt zu denselben Resultaten, ist aber umständlicher, doch wollen wir die Gelegenheit benutzen, um wenigstens die Konvergenzgesetze in der algebraischen Form, wie sie in § 7 und § 17 entwickelt worden sind, an vorliegendem Beispiele zu erproben.

Die Bruchkette 4) des § 18 entwickelt sich aus der Iteration $x = -a_1 - \frac{a_0}{x} = f(x)$. Demgemäß ist $f'(x) = \frac{a_0}{x^2}$. Bezeichnen wir nun die absolut gröfsere Wurzel der Gleichung § 18 Nr. 1 mit ξ_α , die andere mit ξ_β und erwägen, dafs $\xi_\alpha \cdot \xi_\beta = a_0$ ist, so folgt:

$$f'(\xi_\alpha) = \frac{\xi_\alpha \cdot \xi_\beta}{\xi_\alpha^2} = \frac{\xi_\beta}{\xi_\alpha}, \text{ also } |f'(\xi_\alpha)| < 1.$$

Daher ist die absolut gröfsere Wurzel, mag ihr Vorzeichen positiv oder negativ sein, immer durch den eben erwähnten Kettenbruch darstellbar. Hingegen da

$$f'(\xi_\beta) = \frac{\xi_\alpha \cdot \xi_\beta}{\xi_\beta^2} = \frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta}, \text{ also } |f'(\xi_\beta)| > 1,$$

so ist die absolut kleinere Wurzel durch denselben Kettenbruch nie darstellbar.

Dieselbe Überlegung, auf $v(x)$ angewandt, führt zu dem Ergebnis, dafs die durch Gleichung 5) in § 18 dargestellte Bruchkette stets gegen die absolut kleinere und nie gegen die gröfsere Wurzel konvergiert. —

Was nun die Gleichungen betrifft, welche die Wahl des Anfangswertes einschränken, so ergibt sich aus dem in § 17 über x_{w-1} und x_{w+1} Gesagten sofort die Untauglichkeit des zweiten Wurzelpunktes als Anfangswert. Die Punkte Q_{w-1} und Q_{w+1} (Fig. 35 und 36) kommen ganz in Wegfall, weil sowohl $f(x)$ wie $v(x)$ im vorliegenden Falle eindeutige Funktionen sind. Die Punkte B und B_1 (Fig. 38) erfordern die Aufstellung der Gleichung $f(x) = v(x)$, welche in vorliegendem Falle heifsen würde:

$$-a_1 - \frac{a_0}{x} = -\frac{a_0}{a_1 + x}.$$

Diese führt aber von selbst auf die ursprüngliche Gleichung $a_0 + a_1x + x^2$ zurück, enthält also keine weiteren Wurzeln als diese.

Hiernach bliebe noch algebraisch zu untersuchen, ob die zweite Gleichungswurzel jedesmal bloß ein einzelner Ausnahmepunkt oder eine wirkliche Grenze für die Wahl des Anfangswertes ist. Ferner bleibt zu erwägen, daß sowohl $f(x)$ wie $v(x)$ eine Unstetigkeitsstelle aufweisen, und daher muß die Frage beantwortet werden, ob aus diesem Umstande sich Schranken für den Anfangswert ergeben.

Allein die diesbezüglichen algebraischen Untersuchungen will ich hier nicht vorführen, weil sie gegen die vorhin dargelegte geometrische Erledigung dieser Sache an Einfachheit weit zurückstehen und an und für sich auch kein Interesse haben.

§ 23. Statt dessen sollen einige Sätze über Kettenbrüche, welche sich aus dem Vorstehenden unmittelbar ergeben, hier zusammengestellt werden.

Wir unterscheiden Kettenbrüche von zweierlei Form, nämlich:

$$1) \quad p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \dots}}}$$

$$2) \quad \frac{q}{p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \dots}}}$$

Hierüber gelten folgende Sätze:

a) Für $q > 0$ konvergieren beide Formen immer und die Näherungen pendeln. Für $q < 0$ konvergieren beide Formen nur, wenn $p^2 + 4q > 0$ ist, und die Näherung geschieht dann einseitig.

b) Die Form 1) liefert stets die absolut größere Wurzel der Gleichung $x^2 = px + q$, und zwar eine positive oder negative, je nachdem $p \geq 0$ ist. — Die Form 2) liefert stets die absolut kleinere Wurzel der Gleichung $x^2 + px = q$, und zwar eine positive oder negative, je nachdem p und q gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

c) Zu der durch die Form 1) gelieferten Wurzel erhält man die zweite Wurzel derselben Gleichung, wenn man in der Form 2) das Vorzeichen von p umkehrt, daher ist:

$$\left[p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \dots}} \right] + \left[\frac{q}{-p + \frac{q}{-p + \dots}} \right] = p,$$

$$\left[p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \dots}} \right] \cdot \left[\frac{q}{-p + \frac{q}{-p + \dots}} \right] = -q$$

und $\left[p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \dots}} \right] \cdot \left[\frac{q}{p + \frac{q}{p + \dots}} \right] = q.$

§ 24. Passend anfügen läßt sich hier die Erörterung einer quadratischen Gleichung, welche Herr Netto (a. a. O. S. 311) in der Form $\alpha z^2 + cz - b = 0$ vorführt, und aus welcher er durch Zerlegung des Coeffizienten c in die Differenz $\beta - a$ bildet:

$$\alpha z^2 + \beta z = az + b, \quad z = \frac{az + b}{\alpha z + \beta}.$$

Indem er die Voraussetzung macht, daß $\alpha > 0$ und daß die Diskriminante $(\beta - a)^2 + 4\alpha b$ nicht negativ sei, ermittelt er durch Rechnung folgende Resultate:

1) Je nachdem $a + \beta \geq 0$, findet die Annäherung an die algebraisch größere oder kleinere Wurzel statt.

2) Ist $a + \beta = 0$, so findet überhaupt keine Annäherung statt.

3) Bei gleichen Wurzeln findet die Annäherung von der Seite der größeren oder kleineren Werte statt, je nachdem $\alpha(a + \beta) \geq 0$ ist¹⁾.

4) Mit Ausnahme der jedesmaligen zweiten Gleichungswurzel kann jeder beliebige Wert als Ausgangspunkt der Iteration dienen. —

Es soll nunmehr untersucht werden, welche Resultate bei geometrischer Veranschaulichung der Sache aus der Figur abgelesen werden können. — Die Kurve:

$$y = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}$$

1) Der Faktor α vor der Klammer ist nicht nötig, weil $\alpha > 0$ zu Anfang vorausgesetzt worden ist.

ist offenbar eine Hyperbel, von welcher eine Asymptote die Gleichung $y = \frac{a}{\alpha}$, die andere die Gleichung $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ hat. Nun gehören aber zu jedem Asymptotenkreuz zwei konjugierte Hyperbeln. Wir betrachten sie vorläufig beide und werden die Scheidung später vornehmen.

Wenn wir nun darauf achten, daß die Wurzelachse zu dem Durchschnittspunkte der Asymptoten eine dreifache Lage haben, indem sie entweder durch ihn hindurch oder über oder unter ihm hergehen kann, und daß sie wegen der vorausgesetzten Reellität der Wurzeln die Kurve jedenfalls treffen muß, so erhalten wir die drei Figuren 49, 50 und 51.

Fig. 49.

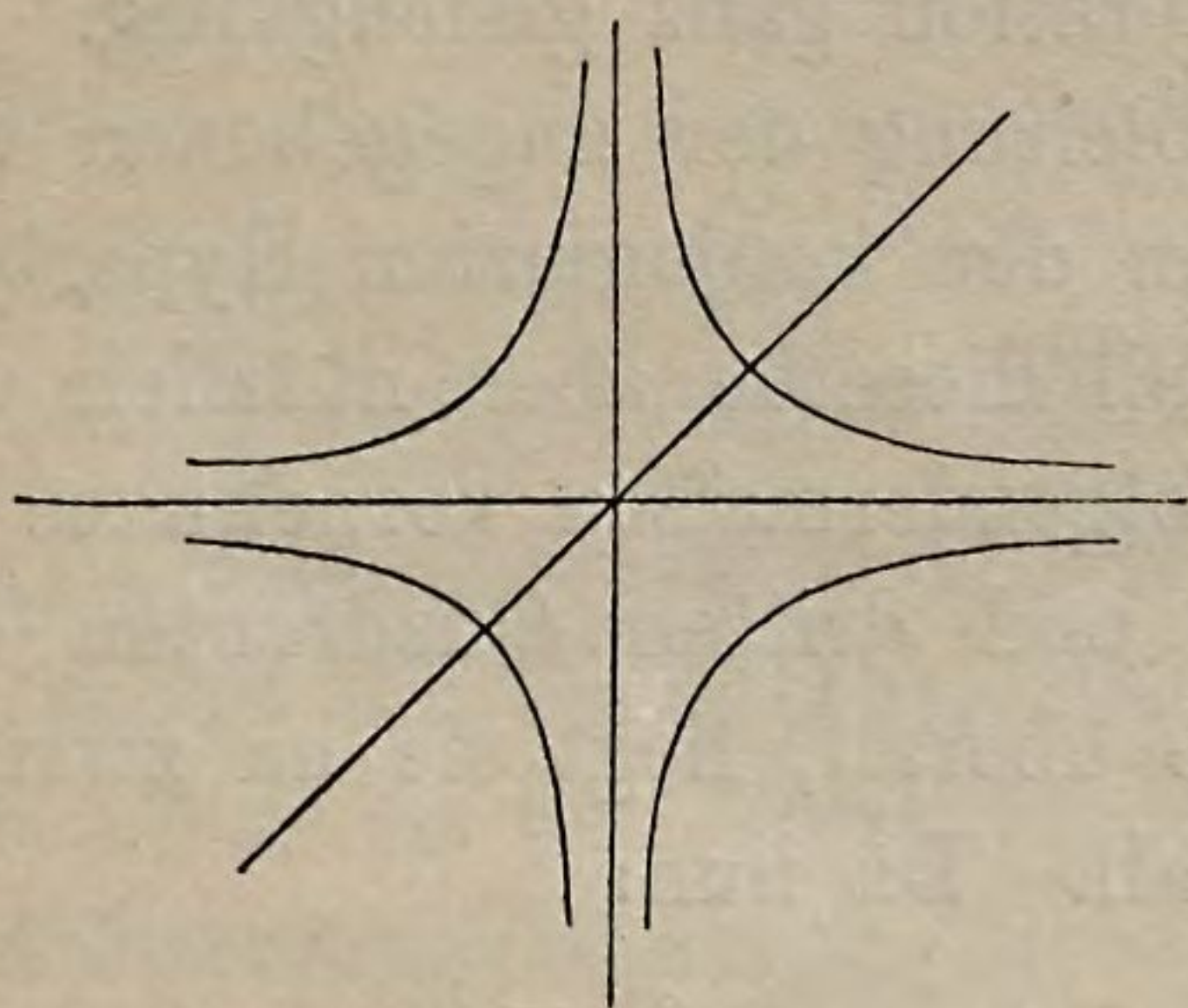
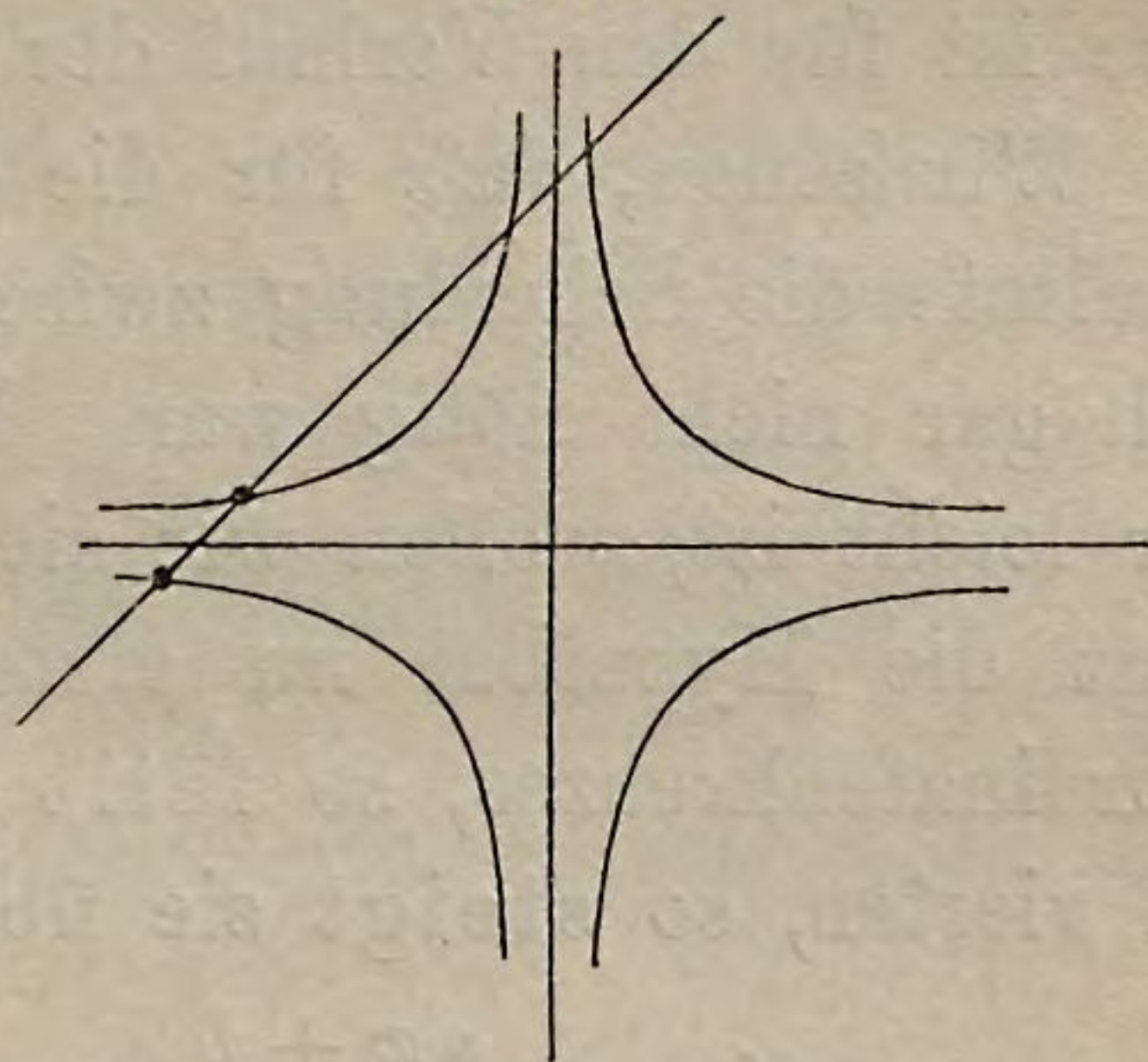


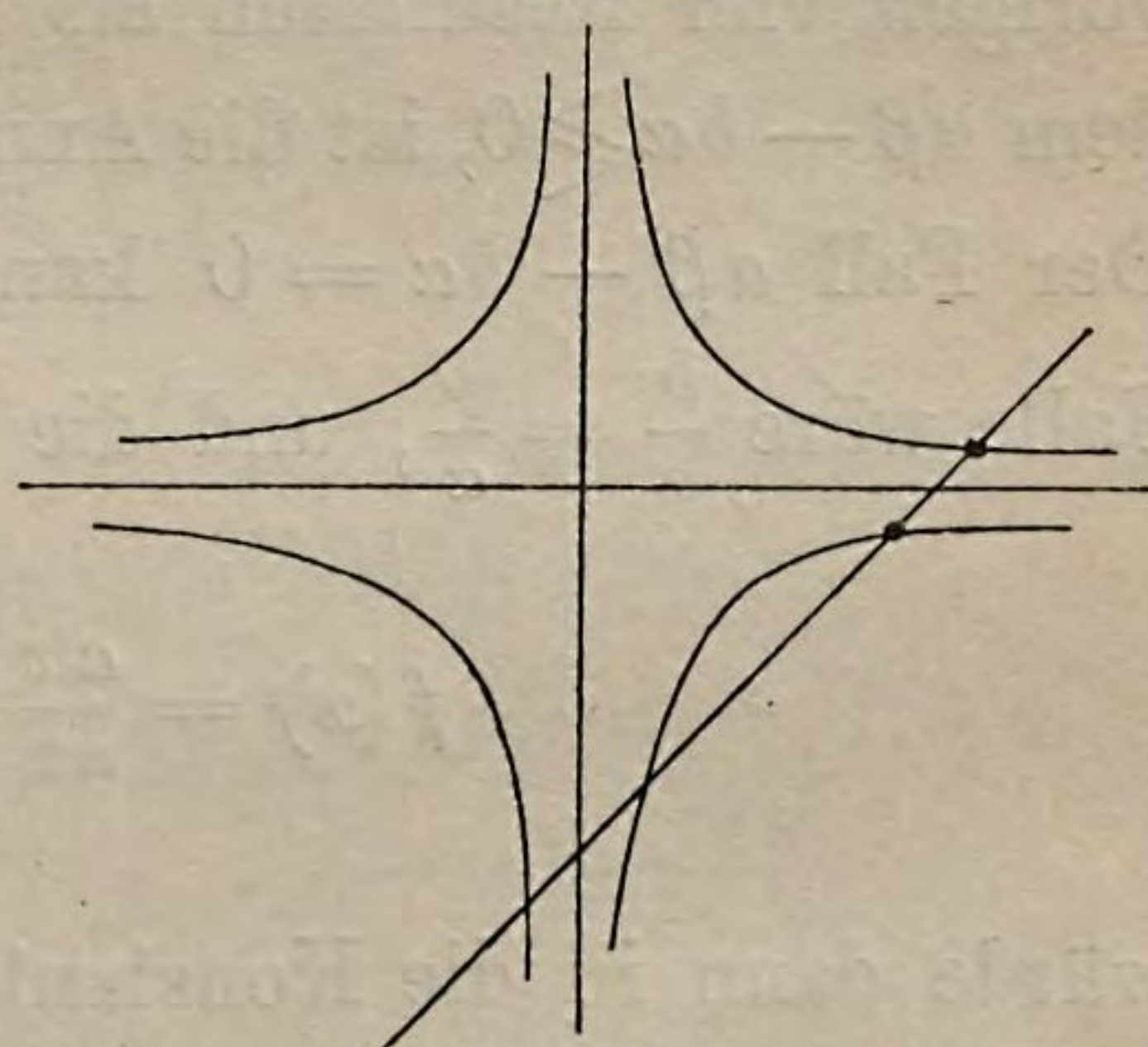
Fig. 50.



Im ersten Falle deckt die Kurve ihr Spiegelbild, also findet, wie schon wiederholt gezeigt, keine Annäherung statt.

Im zweiten Falle bildet bei beiden konjugierten Hyperbeln der Punkt der algebraisch kleineren Wurzel das Ziel der Iteration, weil dort die Kurve flacher liegt. Im dritten Falle ist dasselbe von der algebraisch größeren Wurzel auszusagen.

Fig. 51.



Je nachdem nun aber ein Punkt auf, unter oder über der Wurzelachse liegt, besteht für seine Koordinaten die Relation $y \lessgtr x$. Wenden wir das auf die Koordinaten des Asymptotendurchschnitts an, so ergibt sich:

$$\frac{a}{\alpha} \geq -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 0$$

oder, da $\alpha > 0$ ist, $a + \beta \geq 0$.

Damit sind von den durch Hrn. Netto berechneten Resultaten Nr. 1 und 2 schon erledigt. Bezüglich Nr. 3 ist nur daran zu erinnern, daß die Kurve im Falle gleicher Wurzeln die Wurzelachse berührt, und von welcher Seite dann am Schlusse der Iteration die Annäherung herkommt, lehrt Fig. 18 und 19.

Nr. 4 ist in § 19 und 20 schon erledigt, weil die dort behandelten Hyperbeln von den hier vorhandenen sich lediglich durch die Lage des Koordinatencentrums unterscheiden, und diese ist für den Verlauf der Iteration ganz gleichgültig.

Wir sehen, daß für die Ableitung der angegebenen vier Resultate die Scheidung zwischen den konjugierten Hyperbeln noch gar nicht nötig war. Weil dieselbe aber nützlich und sehr leicht ist, wollen wir sie folgendermaßen vornehmen. — Liegt die Hyperbel im ersten und dritten Quadranten des Koordinatenkreuzes, so fällt sie überall, liegt sie im zweiten und vierten, so steigt sie überall. Da nun:

$$f(x) = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}, \quad \text{so ist} \quad f'(x) = \frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha x + \beta)^2}.$$

Folglich haben wir die steigende oder fallende Hyperbel, je nachdem $a\beta - b\alpha \geq 0$ ist. Und nun können wir zu den vorigen vier Resultaten als fünftes noch hinzufügen: Je nachdem $a\beta - b\alpha \geq 0$, ist die Annäherung einseitig oder pendelnd. — Der Fall $a\beta - b\alpha = 0$ kann nie vorliegen. Denn in diesem Falle wäre $\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}$, und die Funktion

$$f(x) = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta} = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{\alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

würde dann in die Konstante $\frac{a}{\alpha}$ zusammenschrumpfen.

§ 25. Um nun von vorstehenden Resultaten noch eine algebraische Anwendung (die ich bei Netto nicht gemacht finde) hier anzuschließen, sei bemerkt, daß jeder periodische Kettenbruch sich in das Paradigma:

$$x = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}$$

zusammenziehen läßt. Also gilt das über diesen Algorithmus Gesagte auch von allen periodischen Kettenbrüchen.

Wählen wir z. B. einen Kettenbruch mit der Periode $\frac{2}{3} - \frac{7}{2} + \frac{1}{4}$, so zieht dieser sich auf Grund der Gleichung:

$$x = \frac{2}{3 - \frac{7}{2 + \frac{1}{4 + x}}}$$

zusammen in den Bruch $\frac{4x + 13}{-x - 1}$. Darum läßt sich zutreffend von ihm aussagen, daß er nicht konvergiert; denn

$$(\beta - a)^2 + 4\alpha b = -27.$$

Wählen wir als zweites Beispiel einen Kettenbruch von der Periode $\frac{2}{3} + \frac{7}{2} - \frac{1}{4}$, so zieht dieser sich zusammen in den Bruch $\frac{4x + 14}{13x + 49}$. Daher sieht man, daß die Kette konvergiert, weil $(\beta - a)^2 + 4\alpha b > 0$ ist. Und da ferner $\beta + a > 0$, so liefert sie die algebraisch gröfsere Wurzel. Da endlich $a\beta - b\alpha$ den Wert 14 hat, so geschieht die schließliche Annäherung einseitig.

§ 26. Auf Grund dieser Resultate kann man nun aber noch einen Schritt weiter gehen und die Aufgabe lösen: Einen Kettenbruch von mehrgliederiger Periode in einen eingliederigen zu verwandeln.

Denn wenn wir die Gleichung:

$$x = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}$$

auf die ursprüngliche Form $\alpha x^2 + cx = b$ zurückbringen, so entsteht $x(\alpha x + c) = b$, also einerseits $\alpha x + c = \frac{b}{x}$,

$$x = \frac{1}{\alpha} \left(-c + \frac{b}{x} \right) = f(x) = \frac{1}{\alpha} \left[-c + \frac{b\alpha}{-c + \frac{b\alpha}{-c + \dots}} \right].$$

Andererseits entsteht:

$$x = \frac{b}{c + \alpha x} = v(x) = \frac{b}{c + \frac{\alpha b}{c + \frac{\alpha b}{c + \dots}}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha b}{c + \frac{\alpha b}{c + \dots}}$$

Welcher von diesen durch $f(x)$ und $v(x)$ ausgedrückten Formen ist nun der ursprüngliche Kettenbruch gleich?

Für $f(x)$ sind die Asymptoten $y = -\frac{c}{\alpha}$ und $x = 0$. Für $v(x)$ sind dieselben entsprechend $y = 0$ und $x = -\frac{c}{\alpha}$. Für $f(x)$ gelten also die Figuren 49, 50 und 51, wenn man die vertikale Asymptote zugleich als Y -Achse betrachtet. Je nachdem daher $y \overline{\geq} x$, wird keine, oder die algebraisch kleinere oder grössere Wurzel erzielt. Diese Relation heisst also in vorliegendem Falle

$$-\frac{c}{\alpha} \overline{\geq} 0 \quad \text{oder} \quad \frac{c}{\alpha} \overline{\geq} 0,$$

oder, weil $\alpha > 0$, einfach $c \overline{\geq} 0$, oder, weil $c = \beta - a$ ist, $\beta - a \overline{\geq} 0$.

Für $v(x)$ heisst die entsprechende Relation nunmehr selbstverständlich $\beta - a \overline{\geq} 0$.

Da nun nach § 24 der Algorithmus ist $\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}$, also auch der entsprechende Kettenbruch von mehrgliederiger Periode die grössere oder kleinere Wurzel ergibt, je nachdem $\beta + a \geq 0$ ist, so erhalten wir durch Vereinigung dieser beiden Resultate folgende einfache Relation:

Je nachdem

$$\frac{\beta + a}{\beta - a} \geq 0,$$

ist der Kettenbruch entweder gleich

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{b\alpha}{(\beta - a) + \frac{b\alpha}{(\beta - a) + \dots}}$$

oder gleich

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \left[\alpha - \beta + \frac{b\alpha}{(a - \beta) + \frac{b\alpha}{(a - \beta) + \dots}} \right].$$

In dem vorhin angeführten zweiten Beispiel war der Kettenbruch, dessen Periode $\frac{2}{3} + \frac{7}{2} - \frac{1}{4}$ hiefs, gleich dem Bruche $\frac{4x+14}{13x+49}$. Da hierin $\frac{\beta+a}{\beta-a} = \frac{53}{45}$, so ist derselbe gleich dem eingliederig periodischen Kettenbruche

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{182}{45 + \frac{182}{45 + \dots}}$$

Bei letzteren müssen übrigens die Annäherungen pendeln, weil aus der Gleichung $v(x) = \frac{14}{45 + 13x}$ folgt, daß $v'(x)$ stets negativ ist, und demnach die Hyperbel überall, mithin auch an den Wurzelpunkten fällt.

VII.

Weitere Anwendungen. Potenz- und Wurzelketten.

§ 25. Ein zweites Paar von inversen Algorithmen, welches sich aus der quadratischen Gleichung $a_0 + a_1 x + x^2 = 0$ bilden läßt, ist:

$$1) \quad x = - \frac{a_0 + x^2}{a_1} = f(x)$$

$$2) \quad x = \pm \sqrt{-a_0 - a_1 x} = v(x).$$

Die Kurve $y = f(x)$, wie auch ihr Spiegelbild $y = v(x)$ sind Parabeln. Die Achse der ersteren fällt mit der vertikalen, die der zweiten mit der horizontalen Koordinatenachse zusammen. Weil:

$$f'(x) = - \frac{2x}{a_1} \quad \text{und} \quad f''(x) = - \frac{2}{a_1},$$

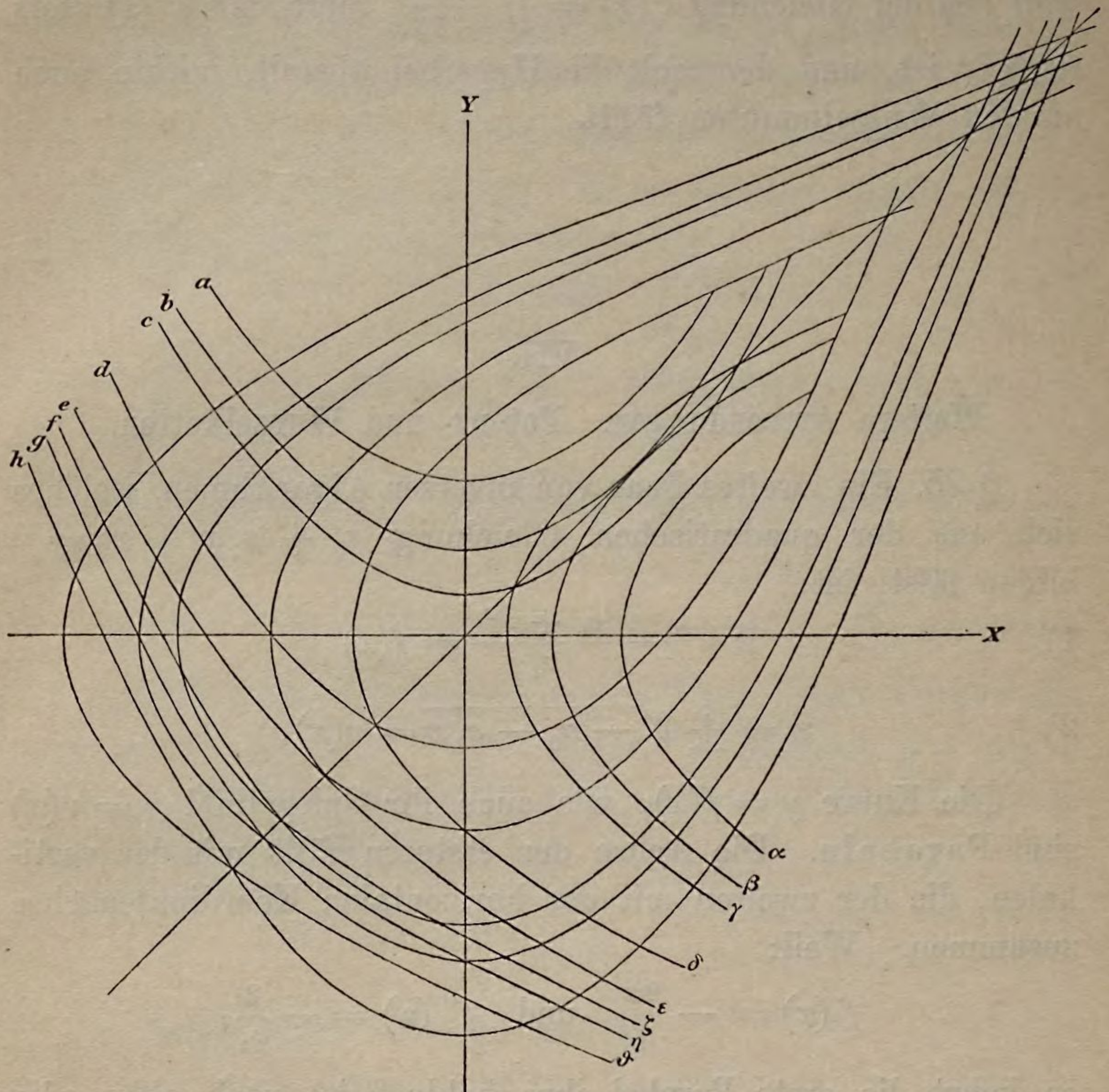
so kehrt die erste Parabel ihre hohle Seite nach oben oder unten, je nachdem $a_1 \leq 0$ ist.

Nehmen wir zuerst $a_1 < 0$ an, so sehen wir in Fig. 52 alle dabei möglichen Fälle dargestellt. Die Kurven a, b, c, d, e, f, g, h entsprechen der Gleichung $y = f(x)$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi, \eta, \vartheta$ der Gleichung $y = v(x)$.

Die Kurven a und α zeigen keinen Schnittpunkt, stellen also den Fall dar, wo die Gleichung $a_0 + a_1 x + x^2 = 0$ keine reellen Wurzeln hat. Die Curven b und β berühren sich auf der Wurzelachse; die Gleichung besitzt zwei gleiche positive Wurzeln. Die Kurven c und γ schneiden sich in zwei Punkten,

welche beide noch positiven Wurzelwerten entsprechen. Bei den folgenden Kurvenpaaren ist jedesmal eine Wurzel negativ, die andere positiv und von größerem Betrage als jene, aber

Fig. 52.



es waltet dabei noch folgender Unterschied ob. Die Kurven e und ε haben im negativen Wurzelpunkte eine gemeinschaftliche Tangente, welche auf der Wurzelachse senkrecht steht; bei dem Paare d und δ ist d im Schnittpunkte schräger als δ , hingegen ist f , g und h daselbst steiler als ζ , η und ϑ .

Da nun die Konvergenz der Iteration von der Richtung der Kurve am Wurzelpunkte abhängt, so lehrt der Augenschein folgende Sätze:

- 1) Die absolut größere Wurzel ist innen gleich limit $v(x)$.

2) Sind gleiche Wurzeln vorhanden, so sind dieselben sowohl $= \lim f(x)$ als $= \lim v(x)$, allein die Annäherung wird zuletzt unendlich gering, weshalb das Iterationsverfahren in diesem Falle nicht am Platze ist.

3) Die absolut kleinere Wurzel ist gleich $\lim f(x)$ in den Fällen c und d , sie ist nicht limitierbar im Falle e und ist gleich $\lim v(x)$ in den Fällen ξ , η und ϑ .

4) Bei den positiven Wurzeln ist die Annäherung zuletzt einseitig, bei den negativen pendelnd.

§ 26. Die algebraischen Unterscheidungsmittel dieser einzelnen Fälle sind leicht zu finden. — Der Diskriminantensatz sagt, daß in dem Falle a , α die Größe

$$a_1^2 - 4a_0 < 0$$

ist. Setzen wir zur Abkürzung den Quotienten

$$- \frac{4a_0}{a_1^2} = Q,$$

so kennzeichnet dieser Fall sich durch die Relation $Q < -1$.

Entsprechend haben wir $Q = -1$ in dem Falle b , β und $Q > -1$ in allen übrigen Fällen.

Der Grenzfall e , ε liegt vor, wenn $f'(x) = -\frac{2x}{a_1} = -1$ ist. Setzen wir hier den Wert ein:

$$x = -\frac{a_1}{2} (1 - \sqrt{1 + Q}),$$

welchen die Funktion $f(x)$ am Wurzelpunkte des kleineren Betrages hat, so ergibt sich die Gleichung:

$$f'(x) = 1 - \sqrt{1 + Q} = -1, \text{ also } Q = 3.$$

Während demnach die Kurve $y = f(x)$ aus der Lage b in die Lage e übergeht, wächst Q von -1 bis $+3$. Wächst Q weiter, so haben wir die Lagen f , g , h . Daher können wir folgenden zusammenfassenden Satz aussprechen:

Wenn $Q < -1$, so sind die Wurzeln komplex.

Wenn $Q = -1$, so sind die Wurzeln reell und beide $= \lim f(x) = \lim v(x)$.

Wenn $Q > -1$, so ist die Wurzel größeren Betrages $= \lim v(x)$. Die Wurzel kleineren Betrages

aber ist entweder $= \lim f(x)$ oder $= \lim v(x)$, je nachdem $Q \leq 3$ ist.

Daher kann $\lim v(x)$ sowohl die Wurzel größeren als kleineren Betrages darstellen; für die erstere ist

$$v(x) = + \sqrt{-a_0 - a_1 x},$$

für die letztere

$$v(x) = - \sqrt{-a_0 - a_1 x},$$

zu setzen.

§ 27. Wir haben bisher vorausgesetzt, daß a_1 negativ sei. Ist aber a_1 positiv, so kehren die Funktionen $f'(x)$ und $f''(x)$ ihr Vorzeichen um. Also richtet dann die Parabel $y = f(x)$ ihre hohle Seite nach unten, und die Parabel $y = v(x)$ richtet sie demzufolge nach links. Wir brauchen daher die Fig. 52 bloß auf den Kopf zu stellen, dann haben wir schon die Kurven in diejenige Lage gebracht, welche die Annahme $a_1 > 0$ zur Folge hat.

Hiernach sehen wir sofort, daß alles in § 25 über die Wurzeln größeren und kleineren Betrages Gesagte auch für $a_1 > 0$ völlig unverändert bleibt. — Ebenso unverändert bleibt der Inhalt von § 26, und zwar schon deswegen, weil die Größe Q bloß das Quadrat von a_1 in sich enthält. Nur der Satz Nr. 4 in § 25 ist dahin abzuändern, daß er hier heißen muß: Bei den negativen Wurzeln ist die schließliche Annäherung einseitig, bei den positiven pendelnd. Ferner ist die absolut größere Wurzel $= \lim (- \sqrt{-a_0 - a_1 x})$ und im Konvergenzfall die absolut kleinere

$$= \lim (+ \sqrt{-a_0 - a_1 x}).$$

§ 28. Jetzt erübrigt bloß noch, die Grenzen für den Anfangswert x_0 festzustellen. — Wir schließen zunächst den Fall a , α aus, in welchem $Q < -1$ und demnach keine reelle Wurzel vorhanden ist. Dann aber auch die beiden Fälle b , β und e , ε , in welchen $Q = -1$ bez. $Q = 3$ ist, weil diese für die Ausführung einer Iteration ungeeignet sind.

Es soll sich nun zuerst um die Wurzel größeren Betrages, also um $\lim \pm \sqrt{-a_0 - a_1 x}$ handeln. — Die in Betracht kommenden Kurven sind γ , δ , ζ , η , ϑ , und zwar so-

wohl in derjenigen Lage, wie sie Fig. 52 zeigt, als auch in jener, welche sie nach Umkehrung dieser Figur haben.

Bei der Kurve γ haben die Wurzeln beide das nämliche Vorzeichen, also ist nach dem Koeffizientensatze $a_0 > 0$. Der Verlauf der Parabel läßt sofort erkennen:

1) daß für $a_1 < 0$ der Anfangswert gar nicht zu groß und bei $a_1 > 0$ gar nicht zu klein gewählt werden kann;

2) daß für $a_1 < 0$ eine untere, für $a_1 > 0$ eine obere Grenze vorhanden ist, welche durch die Wurzel kleineren Betrages, d. h. durch den Wert $x_0 = -\frac{a_1}{2}(1 - \sqrt{1 + Q})$ gebildet wird;

3) daß sowohl für $a_1 < 0$ als $a_1 > 0$ der besondere Wert $x_0 = 0$ außerhalb des Konvergenzbereichs liegt.

Die Kurven δ bis ϑ , bei denen stets $a_0 < 0$, also $Q > 0$ ist, zeigen in Bezug auf die Erzielung der Wurzel größeren Betrages keinen Unterschied voneinander. Man erkennt wiederum, daß x_0 für $a_1 < 0$ nicht zu groß, für $a_1 > 0$ nicht zu klein gewählt werden kann; ferner daß für $a_1 < 0$ eine untere, für $a_1 > 0$ eine obere Grenze vorhanden ist, aber nicht etwa die Wurzel kleineren Betrages — die in diesem Falle vielmehr ganz bedeutungslos ist — bildet die Grenze, sondern der Scheitelpunkt der Parabel, also der Punkt $x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$. Drittens ist noch zu bemerken, daß $x_0 = 0$ als Anfangswert brauchbar ist.

§ 29. Für die Wurzel kleineren Betrages kommen einerseits die Kurven c und d , nämlich wenn Q zwischen -1 und $+3$ liegt, andererseits die Kurven ξ , η und ϑ , nämlich wenn $Q > 3$ ist, in Betracht.

Im ersteren Falle werden die Grenzen für x_0 durch die Wurzel größeren Betrages festgesetzt nach § 15. Die dort erwähnten Punkte $P_{\omega \pm 1}$ und $Q_{\omega \pm 1}$ haben offenbar die Abscissen $\mp \frac{a_1}{2}(1 \mp \sqrt{1 + Q})$. Da der Nullpunkt zwischen diesen beiden Werten liegt, so ist $x_0 = 0$ als Anfangswert brauchbar.

Im zweiten Falle sind die Unterschiede der Kurven ξ , η und ϑ zu beachten. Die Kurve ξ schneidet ihr Spiegelbild

f auſſer in den beiden Wurzelpunkten noch in zwei anderen Punkten. Dasselbe iſt bei η und g , ſowie bei ϑ und h der Fall. Nun kommt es darauf an, wo jene zwei Durchſchnittspunkte, die nicht Wurzelpunkte ſind, liegen. — In dem durch ξ und f dargeſtellten Falle liegen ſie beide auf einem und demſelben Aſte der Parabel ξ , und hier trifft zu, was in § 16 entwickelt worden iſt. Jene beiden Schnittpunkte ſtellen nämlich die unüberſchreitbaren Grenzen für die Wahl von x_0 dar. — In dem durch ϑ und h dargeſtellten Falle aber liegen die eben bezeichneten Schnittpunkte nicht beide auf einem und demſelben Parabelaste und haben als Grenzbeſtimmung gar keine Bedeutung. Vielmehr iſt hier erſichtlicherweise der Scheitelpunkt der Parabel ϑ die eine Grenze und eine im Scheitel von h konſtruierte Tangente beſtimmt auf ϑ die andere Grenze.

Wie dieſe beiden Möglichkeiten von einander unterſchieden werden können, zeigen die Parabeln η und ϑ , bei denen die erwähnten Schnittpunkte genau auf die Koordinatenachſen fallen. Denn da nach § 17 dieſe Schnittpunkte ſchon der allgemeinen Gleichung $f(x) = v(x)$ genügen, hier inſbeſondere aber noch $x = 0$ geſetzt werden darf, ſo haben wir zu ſchreiben $f(0) = v(0)$, woraus ſich ergibt:

$$-\frac{a_0}{a_1} = \pm \sqrt{-a_0}; \quad \frac{a_0}{a_1^2} = -1 \quad \text{oder} \quad Q = 4.$$

In dem Intervall zwiſchen den beiden Kurven ε und η bewegt ſich demnach die Gröſſe Q zwiſchen 3 und 4, und es gelten daſelbſt die durch die Schnittpunkte von f und ξ dargeſtellten Grenzen für die Wahl des Anfangswertes x_0 . Um dieſe Grenzen genau zu beſtimmen, bilden wir die Gleichung $f(x) = v(x)$, dividieren dieſelbe nach Wegſchaffung der Irrationalität durch die urſprüngliche Gleichung $a_0 + a_1x + x^2 = 0$ und erhalten: $x^2 - a_1x + a_0 + a_1^2 = 0$.

Hieraus ergibt ſich

$$x = \frac{a_1}{2} (1 \pm \sqrt{Q - 3}).$$

Da es ſich hier nur um Fälle handelt, wo Q zwiſchen 3 und 4 liegt, ſo haben dieſe Grenzwerte ſtets ein gleiches Vorzeichen, nämlich das Vorzeichen von a_1 , alſo liegt die

Null niemals zwischen beiden und ist demnach als Anfangswert für x_0 ausgeschlossen.

In dem einzig noch übrigen Falle $Q > 4$ haben wir als erste Grenze den Scheitelpunkt der Parabel, mithin den Wert $x = -\frac{a_0}{a_1}$. Um die zweite zu bestimmen, ziehen wir im Scheitelpunkte von h , dessen Ordinate $y = \frac{a_0}{a_1}$ ist, die Tangente, wodurch auf ξ ein Punkt bestimmt wird, für den die Relation besteht:

$$\frac{a_0}{a_1} = \pm \sqrt{-a_0 - a_1 x}.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \left(1 + \frac{a_0}{a_1^2}\right),$$

oder, was dasselbe ist,

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \left(1 - \frac{Q}{4}\right).$$

Weil $Q > 4$, so hat diese letztere Grenze offenbar das entgegengesetzte Vorzeichen von der ersteren $x = -\frac{a_0}{a_1}$. Also liegt zwischen beiden die Null.

Dafs ξ die Null ausschließt und ϑ sie einschließt, konnte übrigens auch ohne jede Rechnung aus Fig. 52 unmittelbar abgelesen werden.

§ 30. Zur bequemerem Übersicht stellen wir die Ergebnisse hier zusammen.

1) Ist der Quotient $-\frac{4a_0}{a_1^2}$, den wir abkürzend mit Q bezeichnet haben, größer als -1 , so hat die Gleichung zwei von einander verschiedene reelle Wurzeln und dann ist die Wurzel größeren Betrages stets gleich

$$\text{limit } \sqrt{-a_0 - a_1 x},$$

wobei die Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem $a_1 \lessgtr 0$ ist.

2) Für die Grenzen des Anfangswertes ist zu unterscheiden:

a) $Q < 0$. Dann gilt für ein positives, bez. negatives a_1 die Vorschrift:

$$-\infty < x_0 < -\frac{a_1}{2}(1 - \sqrt{1 + Q}) \quad \text{bez.} \quad -\frac{a_1}{2} < x_0 < \infty.$$

$x_0 = 0$ ist ausgeschlossen.

b) $Q > 0$. Dann gilt für ein positives bez. negatives a_1 die Vorschrift:

$$-\infty < x_0 < -\frac{a_0}{a_1} \quad \text{bez.} \quad -\frac{a_0}{a_1} < x_0 < \infty.$$

$x_0 = 0$ ist eingeschlossen.

3) Die Wurzel kleineren Betrages ist gleich

$$\text{limit} \left(-\frac{a_0 + x^2}{a_1} \right),$$

wenn Q zwischen -1 und $+3$ liegt. Der Anfangswert x_0 ist zu wählen zwischen

$$-\frac{a_1}{2}(1 + \sqrt{1 + Q}) \quad \text{und} \quad +\frac{a_1}{2}(1 + \sqrt{1 + Q}).$$

$x_0 = 0$ ist daher eingeschlossen.

4) Die Wurzel kleineren Betrages ist gleich

$$\text{limit} (\pm \sqrt{-a_0 - a_1 x}) \quad \text{für} \quad a_1 \geq 0, \quad \text{wenn} \quad Q > 3 \text{ ist.}$$

Liegt Q zwischen 3 und 4, so heißen die für x_0 geltenden Grenzen $\frac{a_1}{2}(1 \pm \sqrt{Q - 3})$, und $x_0 = 0$ ist ausgeschlossen. Ist aber $Q > 4$, so heißen die Grenzen $-\frac{a_0}{a_1}$, bez. $-\frac{a_0}{a_1}\left(1 - \frac{Q}{4}\right)$, und $x_0 = 0$ ist eingeschlossen.

§ 31. Die Algorithmen für $f(x)$ und $v(x)$ lassen sich in Ketten entwickeln, und diese bedürfen keines Anfangsgliedes x_0 in all den Fällen, wo die Wahl $x_0 = 0$ gestattet ist.

Für $f(x)$ folgt daher aus Nr. 3 des vorigen Paragraphen: Wenn Q zwischen -1 und $+3$ liegt, so ist die absolut kleinere Wurzel

$$\begin{aligned} & -\frac{a_1}{2}(1 - \sqrt{1 + Q}) \\ &= -\frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1} \left(-\frac{a_0}{a_1} \dots - \frac{1}{a_1} \left(-\frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1} \left(-\frac{a_0}{a_1} \right)^2 \right) \dots \right)^2. \end{aligned}$$

Das Aussehen dieser Potenzkette wird etwas übersichtlicher, wenn man die Potenzen als Wurzeln mit gebrochenem Radikator aufschreibt, wodurch natürlich an der Sache

selbst nichts geändert wird. Dann erscheint obige Relation in der Form:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{a_1}{2}(1 - \sqrt{1 + Q}) \\
 & = \sqrt[\frac{1}{2}]{-\frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1} \sqrt[\frac{1}{2}]{-\frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1} \sqrt[\frac{1}{2}]{-\frac{a_0}{a_1} \dots}} = \text{it } f(x).
 \end{aligned}$$

Für $v(x)$ ergibt sich aus Nr. 1 des vorigen Paragraphen, daß stets, wo reelle Wurzeln vorhanden sind, also $Q > -1$ ist, die absolut gröfsere Wurzel

$$\begin{aligned}
 & -\frac{a_1}{2}(1 + \sqrt{1 + Q}) \\
 & = \pm \sqrt{-a_0 - a_1 \sqrt{-a_0 - a_1 \sqrt{-a_0 \dots}}} = \text{it } v(x),
 \end{aligned}$$

wobei die Quadratwurzeln das Vorzeichen $\pm$ bekommen, je nachdem $a_1 \lesseqgtr 0$.

Ebenfalls ist die absolut kleinere Wurzel gleich derselben Wurzelkette, nur muß umgekehrt $\pm$ für $a_1 \gtrless 0$ gewählt werden, und es muß $Q > 4$ sein.

Liegt Q zwischen 3 und 4, die Grenzen mit eingeschlossen, so ist die absolut kleinere Wurzel weder durch eine Potenzkette, noch durch eine unabgeschlossene Wurzelkette darstellbar.

Der letzteren müßte man, um zum Ziele zu kommen, einen passenden Abschluß, z. B. den Wert $\frac{a_1}{2}$ geben.

§ 32. Bekanntlich kann man die Quadratwurzel einer jeden positiven ganzen Zahl als Bruchkette entwickeln. — Auf Grund der im letzten Paragraphen abgeleiteten Formeln ist es ein Leichtes, diese Wurzel auch als Wurzelkette oder als Potenzkette darzustellen. Letzteres hat ein Interesse dadurch, daß es einen Weg zeigt, um aus einer Zahl die Wurzel zu ziehen, ohne daß bei der Rechnung dividiert zu werden braucht.

Aus der ersten Formel des § 31 ergibt sich nämlich:

$$\sqrt{1 + Q} = \frac{a_1^2 - 2a_0}{a_1^2} - \frac{2}{a_1^2} \left(-\frac{a_0}{a_1} \dots - \frac{1}{a_1} \left(-\frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1} \left(-\frac{a_0}{a_1} \right)^2 \dots \right)^2 \right).$$

Setzt man hier z. B.

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 2, \text{ so ist } Q = 1,$$

also

$$\sqrt{2} = 1,5 - 0,5(0,5 - \dots - 0,5(0,5 - 0,5(0,5)^2)^2 \dots)^2,$$

und hier ist gar keine Division erforderlich.

Indessen diese Reihe konvergiert schlecht. Läßt man eine einmalige Division zu, so kann die Quadratwurzel aus jeder beliebigen Zahl viel konvergenter gemacht werden. Dazu gehört sich, wie aus Fig. 52 ersichtlich ist, bloß, daß Q annähernd gleich 0, also $1 + Q$ annähernd gleich 1 gemacht wird. Dies ist immer möglich, wenn man setzt:

$$\sqrt{1 + Q} = \frac{10^n}{b} \sqrt{\frac{b^2(1 + Q)}{10^{2n}}}.$$

Nun kann durch passende Wahl von b und n der Ausdruck

$$\frac{b^2(1 + Q)}{10^{2n}} = 1 + Q_1$$

stets so gestaltet werden, daß Q_1 eine kleine positive oder negative GröÙe wird, und dann konvergiert die Kette rasch.

Beispielsweise ist

$$\sqrt{2} = \frac{1000}{707} \cdot \sqrt{\frac{707^2 \cdot 2}{1000^2}},$$

und

$$\sqrt{\frac{707^2 \cdot 2}{1000^2}} = \sqrt{\frac{499849 \cdot 2}{1000^2}} = \sqrt{\frac{999698}{1000^2}} = \sqrt{1 - \frac{302}{1000^2}}.$$

Setzt man $a_1 = 1000$, so wird $a_0 = 75,5$, und die Wurzel wird annähernd gleich

$$0,999849 - 0,000002(-0,0755)^2 = 0,999848886,$$

woraus $\sqrt{2}$ schon mit fünf richtigen Decimalstellen herauskommt.

Selbstverständlich ist das Interesse an dieser Darstellungsweise mehr theoretisch als praktisch, wie das ja bei der Darstellung durch Bruchketten auch der Fall ist.

Zum Schluß noch eine Bemerkung über die in diesem Abschnitt benutzte GröÙe Q . Die Einführung derselben empfahl sich nicht nur deswegen, weil sie die Resultate ein-

facher und übersichtlicher gestaltete, sondern auch, weil sie die Festlegung der Grenzen durch ganze Zahlen ermöglichte. Es hat nun aber andererseits, wie sich im Folgenden herausstellen wird, seine Vorteile, dieselben Grenzen durch Feststellung desjenigen Wertes zu bestimmen, welchen die Konstante a_0 in den einzelnen Fällen besitzt. Aus der Relation

$$Q = - \frac{4a_0}{a_1^2}$$

ergibt sich sofort, daß den drei Grenzen

$$Q = -1, \quad Q = 3, \quad Q = 4$$

für a_0 beziehungsweise die Bestimmungen entsprechen:

$$a_0 = \frac{a_1^2}{4}, \quad a_0 = -\frac{3}{4}a_1^2, \quad a_0 = -a_1^2.$$

VIII.

Entwicklung der reducierten kubischen Gleichung in Wurzelketten. Trinomische Gleichungen.

§ 33. Die reducierte kubische Gleichung hat die Form $a_0 + a_1x + x^3 = 0$. Hieraus läßt sich bilden:

$$1) \quad x = -\frac{a_0 + x^3}{a_1} = f(x); \quad 2) \quad x = \sqrt[3]{-a_0 - a_1x} = v(x).$$

Entwickelt man beide Funktionen in Ketten, so ergibt sich:

$$1) \quad x = -\frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1} \sqrt[3]{-\frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1} \sqrt[3]{-\frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1} \sqrt[3]{-\frac{a_0}{a_1} \dots}} = \text{it } f(x),$$

$$2) \quad x = \sqrt[3]{-a_0 - a_1 \sqrt[3]{-a_0 - a_1 \sqrt[3]{-a_0 \dots}}} = \text{it } v(x).$$

Nun ist zunächst über die Wurzeln der gegebenen Gleichung vorweg zu bemerken, daß ihre algebraische Summe gleich Null ist, weil das Glied mit x^2 fehlt. Daher haben,

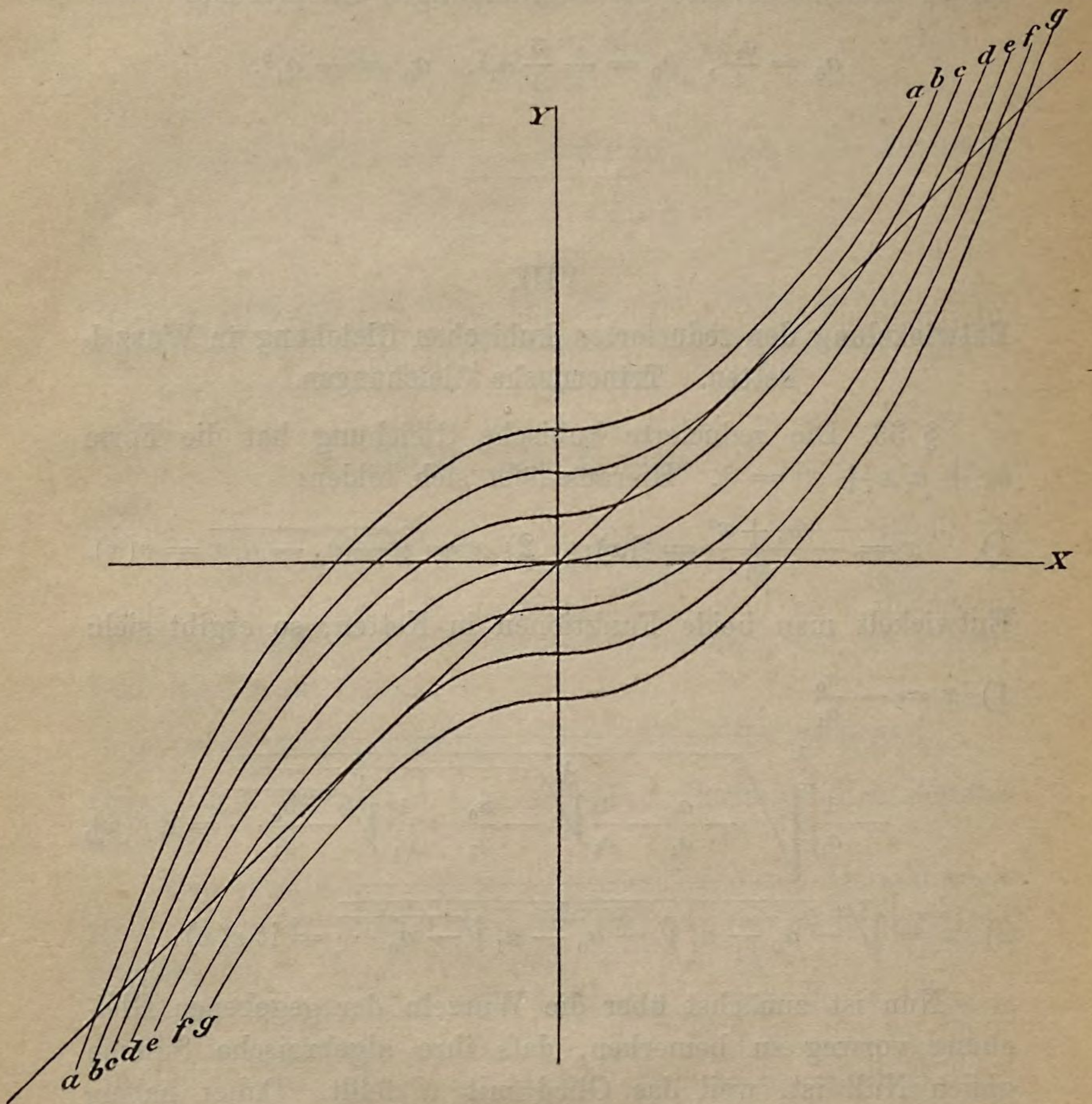
wenn drei reelle Wurzeln vorhanden sind, nur zwei von ihnen ein gleiches, die dritte aber das umgekehrte Vorzeichen. Letzteres ist immer entgegengesetzt dem Vorzeichen von a_0 . Auch im Falle nur eine reelle Wurzel vorhanden ist, hat sie das entgegengesetzte Vorzeichen a_0 . Aus der Kurvengleichung:

$$y = f(x) = -\frac{a_0 + x^3}{a_1}$$

ergibt sich:

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{a_1}.$$

Fig. 53.



Also ist die Kurve überall steigend oder fallend, je nachdem $a_1 \leq 0$ ist. Für $x=0$ ist auch $f'(x)=0$, also geht die Kurve horizontal durch die Y -Achse. Für $x = \pm \infty$ ist $f'(x) = \infty$, also wird mit wachsenden absoluten Werten von x die Kurve immer mehr der Y -Achse parallel.

Sei zunächst $a_1 < 0$, so stellt Fig. 53 den Lauf der Kurve dar. — Für $a_0 = 0$ ist eine Wurzel der Gleichung ebenfalls gleich Null, während die anderen entgegengesetzt gleich sind (Kurve d). Wächst der Wert von a_0 allmählich ins Positive oder Negative, so entstehen drei von Null verschiedene reelle Wurzeln, unter denen die mittlere, die absolut kleinste, durch Iteration von $f(x)$ erhältlich ist (Kurve c und e). Dies dauert an, bis die mittlere mit einer der beiden äußeren Wurzeln zusammenfällt (Kurve b und f). Dann berühren Kurve und Wurzelachse einander, und man hat:

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{a_1} = 1, \quad \text{also} \quad x = \pm \sqrt[3]{-\frac{a_1}{3}}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die ursprüngliche Gleichung ergibt sich dann:

$$a_0 = \pm \sqrt[3]{-\frac{4a_1^3}{27}}.$$

Sobald a_0 diesen Betrag überschreitet, werden zwei Wurzeln komplex. Die übrig bleibende reelle Wurzel kann aber, wie sofort ersichtlich, durch Iteration von $f(x)$ nicht erhalten werden, folglich ist sie gleich $\lim v(x)$. Weil augenscheinlich die Null als Anfangswert zulässig ist, so konvergiert dann auch die obige Kette Nr. 2 gegen diese dritte Wurzel.

Ist hingegen $a_1 > 0$, so haben wir die in Fig. 54 dargestellten Kurven. Reell ist dann immer nur eine Wurzel, und diese ist solange (Kurve c , d und e) gleich $\lim f(x)$, als $f'(x) > -1$ ist. Die Grenze (Kurve b und f) wird also bestimmt durch die Gleichung:

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{a_1} = -1, \quad \text{woraus} \quad x = \pm \sqrt[3]{\frac{a_1}{3}}.$$

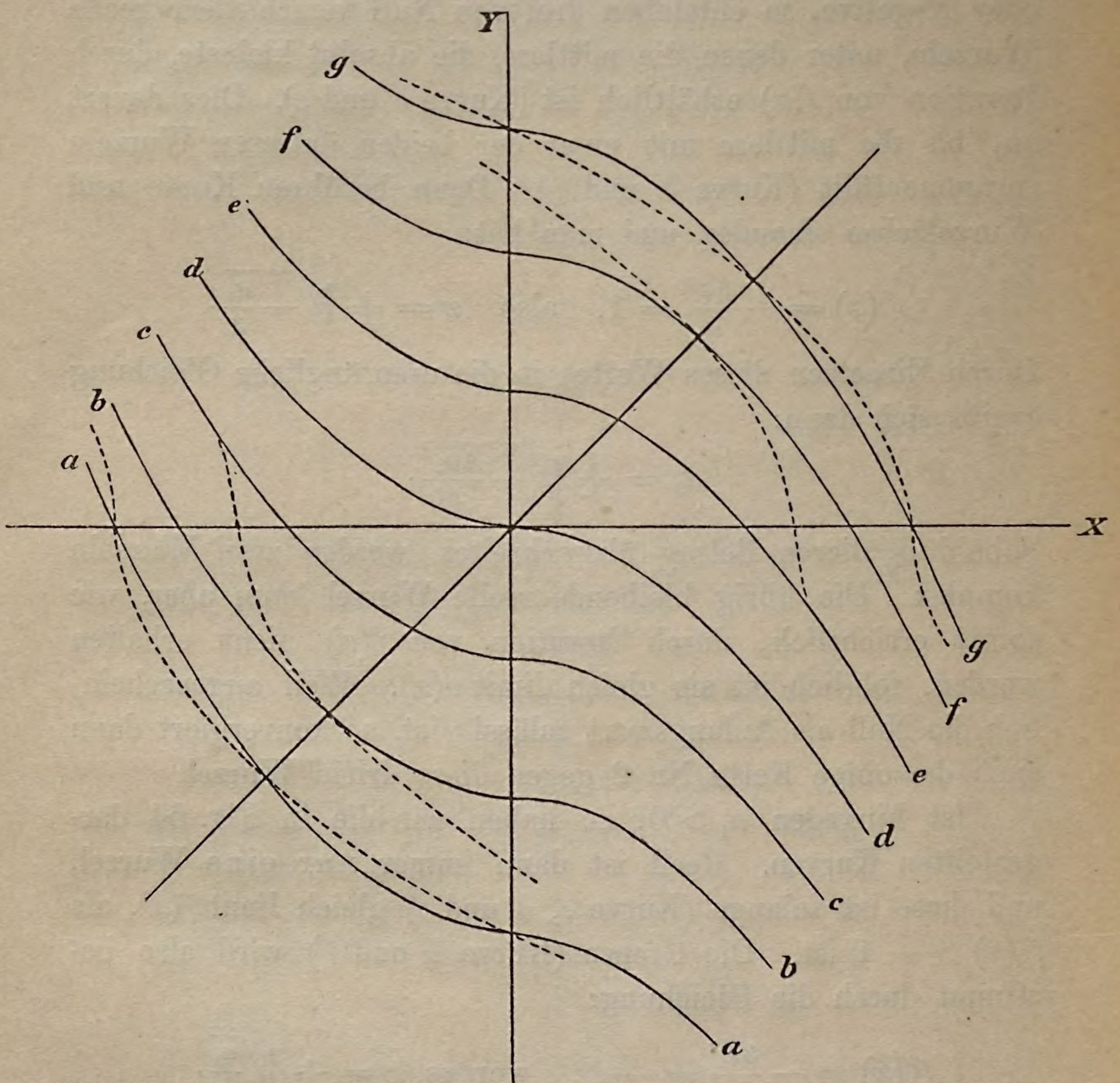
Durch Einsetzen dieses Wertes in die gegebene Gleichung erhält man dann:

$$a_0 = \pm \sqrt[3]{\frac{16a_1^3}{27}}.$$

Sobald auch dieser Betrag von a_0 überschritten ist, wird konvergent die Iteration von $v(x)$, aber die obige Kette Nr. 2 konvergiert darum doch noch nicht sogleich, sondern erst, wenn die Null als Anfangswert zulässig wird. Die Grenze hierfür (Kurve a und g) wird bestimmt durch die Gleichung $f(0) = v(0)$, oder

$$-\frac{a_0}{a_1} = \sqrt[3]{-a_0}, \text{ woraus } a_0 = \pm \sqrt[3]{a_1^3}.$$

Fig. 54.



In dem Zwischenraume:

$$\frac{16 a_1^3}{27} \leq a_0^2 \leq a_1^3$$

ist daher keine der beiden Ketten konvergent.

§ 34. Es ist für das Folgende von Wert, die kubische Gleichung auch noch für den Fall zu untersuchen, wo sie auf die Form:

$$a_0 + a_2 x^2 + x^3 = 0$$

reduziert worden ist. In diesem Falle läßt sich über die Wurzeln derselben vorab Folgendes aussagen:

Mögen die Wurzeln ξ_α , ξ_β , ξ_γ heißen und eine beliebige von ihnen mit ξ bezeichnet werden, dann ist

$$\xi_\alpha \cdot \xi_\beta + \xi_\alpha \cdot \xi_\gamma + \xi_\beta \cdot \xi_\gamma = 0,$$

weil das Glied mit der ersten Potenz von x in der Gleichung fehlt. Daher können unter den Wurzeln, falls sie alle drei reell sind, nur zwei das gleiche Vorzeichen haben, und die dritte ist dann stets die absolut kleinste, was sich z. B. aus der Gleichung:

$$\xi_\alpha = -\frac{\xi_\beta \cdot \xi_\gamma}{\xi_\beta + \xi_\gamma},$$

die aus der letzten hervorgeht, sofort ergibt.

Nun kann man aus der gegebenen kubischen Gleichung bilden:

$$1) \quad x = \pm \sqrt{-\frac{1}{a_2}(a_0 + x^3)} = f(x)$$

und

$$2) \quad x = \sqrt[3]{-a_0 - a_2 x^2} = v(x).$$

Also entsprechend auch die Wurzelketten:

$$1) \quad x = \sqrt{-\frac{a_0}{a_2} - \frac{1}{a_2} \sqrt[3]{-\frac{a_0}{a_2} - \frac{1}{a_2} \sqrt[3]{-\frac{a_0}{a_2} \dots}} = \text{it } f(x),$$

$$2) \quad x = \sqrt[3]{-a_0 - a_2 \sqrt[3]{-a_0 - a_2 \sqrt[3]{-a_0 \dots}}} = \text{it } v(x).$$

Betrachten wir zuerst die Kurve:

$$y = f(x) = \pm \sqrt{-\frac{1}{a_2}(a_0 + x^3)} \quad \text{oder} \quad y^2 = -\frac{1}{a_2}(a_0 + x^3),$$

so ist:

$$2ydy = -\frac{3x^2}{a_2}dx,$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{3x^2}{2a_2y}.$$

Weil aber an allen Wurzelpunkten der Gleichung $y = x$ ist, so hat man:

$$f'(\xi_\alpha) = -\frac{3\xi_\alpha}{2a_2}; \quad f'(\xi_\beta) = -\frac{3\xi_\beta}{2a_2}; \quad f'(\xi_\gamma) = -\frac{3\xi_\gamma}{2a_2}.$$

Demnach ist der absolute Wert von $f'(\xi)$ dem absoluten Werte der einzelnen Wurzeln proportional.

Die Kurve liegt symmetrisch zur X-Achse. Ihre Tangenten sind der Y-Achse parallel sowohl für $x = \pm \infty$, als für $y = 0$; im letzten Falle ist $x = (-a_0)^{\frac{1}{3}}$.

Wenn $a_0 = 0$, so ist der Nullpunkt der Koordinaten ein Doppel- und Rückkehrpunkt der Kurve und eine Doppelwurzel der gegebenen Gleichung, während die dritte Wurzel dann gleich $-a_2$ ist.

Wächst a_0 allmählich ins Positive oder Negative, so gehen die im Nullpunkt vereinigt gewesenen beiden Wurzeln ins Positive und Negative auseinander. Die eine von ihnen nähert sich der dritten Wurzel, wird also die mittlere, indessen die andere nach der entgegengesetzten Richtung geht und zufolge des eben erwähnten Satzes die absolut kleinste bleibt. Aus diesem Grunde behält für sie auch $f'(\xi)$ den kleinsten Betrag.

Wenn $a_0 = 0$ ist, dann ist $f'(\xi)$ am Orte der Doppelwurzel gleich Null. Für kleine Werte von a_0 bleibt $f'(\xi)$ klein, also auch die Iteration von $f(x)$ konvergent für die mittlere Wurzel der gegebenen Gleichung. Dies dauert so lange, bis $f'(x) = 1$ ist, d. h. bis die mittlere mit der absolut größten Wurzel zusammenfällt. Dann wird:

$$a_0 = -\frac{4a_2^3}{27}.$$

Sobald dieser Wert überschritten, sind zwei Wurzeln komplex geworden, die dritte bleibt reell und behält die konvergente Iteration, bis $f'(x) = -1$ ist. Dann hat a_0 den Wert erreicht:

$$a_0 = -\frac{20a_2^3}{27}.$$

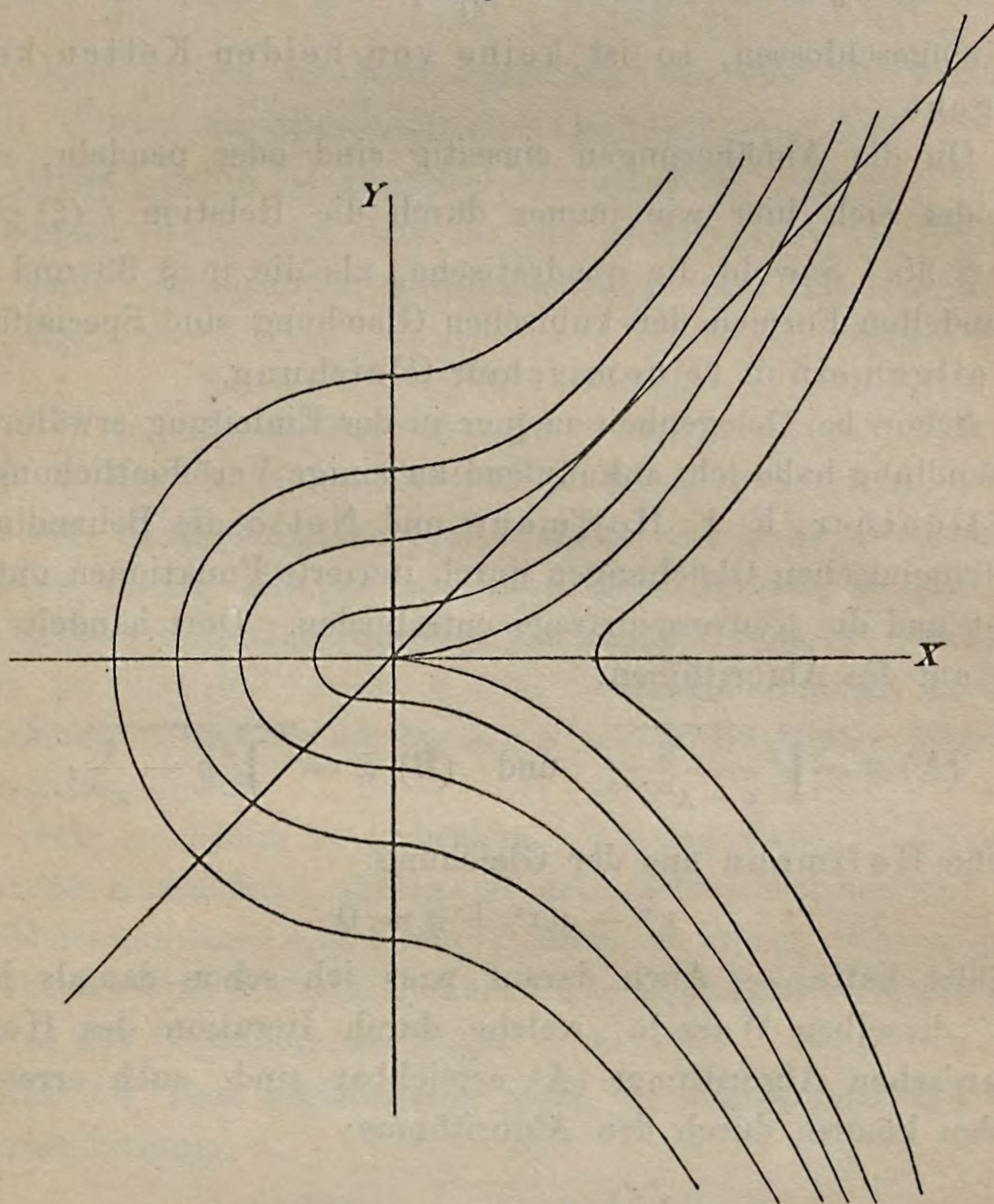
Von hier ab wird $v(x)$ konvergent, aber die Null als Anfangswert wird erst zulässig, wenn

$$a_0 = -a_2^3$$

geworden ist; dann erst ist auch die Kette Nr. 2 konvergent.

Fig. 55 macht Vorstehendes durch unmittelbare Anschauung klar. Dieselbe stellt den Fall dar, wo $a_2 < 0$ ist. Im entgegengesetzten Falle stellt sich die ganze Figur einfach auf den Kopf.

Fig. 55.



Das Ergebnis ist mithin folgendes:

Die Kette Nr. 1 liefert unter drei reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung je nach der Wahl der Vorzeichen die absolut kleinste und die mittlere, falls a_0 zwischen den Werten Null und $-\frac{4a_2^3}{27}$ liegt. Ist diese Grenze überschritten, so besitzt die Gleichung nur noch eine reelle Wurzel, und

die Kette Nr. 1 liefert dieselbe so lange, als a_0 den Wert $-\frac{20a_2^3}{27}$ noch nicht angenommen hat.

Die Kette Nr. 2 liefert bei drei reellen Wurzeln stets die absolut grösste derselben, bei einer reellen Wurzel liefert sie diese erst dann, wenn a_0 den Betrag $-a_2^3$ überschritten.

Liegt a_0 also zwischen $-\frac{20}{27}a_2^3$ und $-a_2^3$, die Grenzen mit eingeschlossen, so ist keine von beiden Ketten konvergent.

Ob die Annäherungen einseitig sind oder pendeln, entscheidet sich hier wie immer durch die Relation $f'(\xi) \geq 0$.

§ 35. Sowohl die quadratische, als die in § 33 und 34 behandelten Formen der kubischen Gleichung sind Specialfälle der allgemeinen trinomischen Gleichung.

Schon bei Gelegenheit meiner in der Einleitung erwähnten Abhandlung habe ich, anknüpfend an einige Veröffentlichungen von Günther, K. E. Hoffmann und Netto die Behandlung der trinomischen Gleichungen durch iterierte Funktionen untersucht und die Konvergenzfrage entschieden. Dort handelte es sich um die Algorithmen:

$$(A) \ x = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}} \quad \text{und} \quad (B) \ x = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x^m}},$$

welche Hoffmann aus der Gleichung:

$$x^m - px^n + q = 0$$

gebildet hatte. — Auch darauf wies ich schon damals hin, daß „dieselben Wurzeln, welche durch Iteration des Hoffmann'schen Algorithmus (A) erreichbar sind, auch erreicht werden können durch den Algorithmus:

$$1) \quad x = \sqrt[n]{\frac{1}{p}(q + x^m)} = f(x),$$

und daß andererseits die durch (B) darstellbaren auch darstellbar sind durch:

$$2) \quad x = \sqrt[m]{-q + px^n} = v(x)."$$

An diesen Punkt möchte ich jetzt anknüpfen. — Aus den Algorithmen 1) und 2) entwickeln sich die Ketten:

$$1) \quad x = \sqrt[n]{\frac{q}{p} + \frac{1}{p} \sqrt[n]{\frac{q}{p} + \frac{1}{p} \sqrt[n]{\frac{q}{p}} \dots}} = \text{it } f(x),$$

$$2) \quad x = \sqrt[m]{-q + p \sqrt[n]{-q + p \sqrt[n]{-q} \dots}} = \text{it } v(x),$$

und diese stellen im Konvergenzfalle die eine oder andere reelle Wurzel der Gleichung $x^m - px^n + q = 0$ dar.

Über letztere ist zunächst zu bemerken, daß $m > n$ angenommen wird, und daß für die geometrische Darstellung drei Fälle von einander zu unterscheiden sind. Es kann nämlich sein:

- a) m gerade und n ungerade,
- b) m ungerade und n ungerade,
- c) m ungerade und n gerade.

Der vierte mögliche Fall, daß m und n beide gerade Zahlen wären, scheidet aus, weil dann x^2 oder x^4 etc. als neue Unbekannte eingeführt werden könnte, wodurch wiederum einer der drei Fälle a, b, c zum Vorschein kommen müßte. Überhaupt wird man die Zahlen m und n als relativ prim zu betrachten haben.

Nun ist leicht zu erkennen, daß im Falle a) die entstehende Kurvenfigur analog ist dem Bilde, welches wir für die Gleichung $a_0 + a_1 x + x^2 = 0$ erhalten haben. Ebenso entspricht der Fall b) der Gleichung $a_0 + a_1 x + x^3 = 0$ und der Fall c) der Gleichung $a_0 + a_2 x^2 + x^3 = 0$.

In der That ergibt sich ganz im allgemeinen aus der Kurvengleichung:

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad py^n = q + x^m,$$

$$npy^{n-1} dy = mx^{m-1} dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{mx^{m-1}}{npy^{n-1}}.$$

Für sämtliche Wurzelpunkte hat man demnach:

$$f'(x) = \frac{m}{np} x^{n-m}.$$

Ist nun die Null selbst ein Wurzelpunkt, mit anderen Worten, ist die Konstante $q = 0$, so wird auch $f'(x) = 0$, weil ja $m > n$ ist.

Demnach liefert die Iteration von $f(x)$ stets die der Null benachbarte Wurzel so lange, bis durch Anwachsen von q zwei Wurzeln einander gleich werden. Diese Grenze wird allgemein bestimmt durch die Gleichung:

$$f'(x) = \frac{m}{np} x^{m-n} = 1, \text{ woraus } x = \left(\frac{np}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

sich ergibt. Durch Einsetzen dieses Wertes in die gegebene trinomische Gleichung kommt:

$$\left(\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}} - p \left(\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} + q = 0.$$

Dies läßt sich in die Form bringen:

$$q = \frac{m-n}{n} \left(\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}.$$

Für diejenige Wurzel, bei welcher mit wachsendem absolutem Werte von q die Funktion $f'(x)$ ins Negative geht, haben wir die Grenzbestimmung:

$$f'(x) = \frac{m}{np} x^{m-n} = -1,$$

also:

$$x = \left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}.$$

Hieraus ergibt sich dann weiter:

$$\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}} - p \left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} + q = 0$$

oder:

$$q = -\frac{m+n}{n} \left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}.$$

Bei dieser Grenze hört die Konvergenz obiger Kette Nr. 1 auf. Die der Kette Nr. 2 fängt aber erst an, sobald der Fall $f(0) = v(0)$ überschritten ist. Dieser kennzeichnet sich durch die Bestimmung:

$$\sqrt[n]{\frac{q}{p}} = \sqrt[m]{-q} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{q}{p}\right)^m = (-q)^n,$$

woraus sich ergibt:

$$q = -(-p)^{\frac{m}{m-n}}.$$

Damit sind die Grenzen der Konvergenzlücke zwischen den beiden Wurzelketten festgelegt.

IX.

Über die Lösung der Aufgabe, eine gegebene Funktion durch Wiederholung ihrer selbst umzukehren.

§ 36. Ist die Gleichung $y = F(x)$ und ein bestimmter Wert von x gegeben, so kann man den zugehörigen Wert von y finden, sobald die in dem Zeichen F zusammengefaßten Operationen genügend bekannt sind. Es handelt sich nun darum, unter der letztgenannten Bedingung durch eben dieselben Operationen x zu finden, wenn y gegeben ist.

Im Grunde war bereits die Auflösung irgend einer Gleichung mit einer Unbekannten durch das Iterationsverfahren die Lösung eines solchen Inversionsproblems; denn man kann ja das absolute Glied oder auch irgend einen anderen Koeffizienten der Gleichung als denjenigen besonderen Wert auffassen, den eine veränderliche GröÙe im gegebenen Falle angenommen habe. Daher liegt schon in unseren bisherigen Entwicklungen ein Beweis für die Möglichkeit, das genannte Verfahren bei dem Inversionsproblem überhaupt mit Erfolg in Anwendung zu bringen. Wir wollen den Kreis dieser Betrachtungen aber nunmehr erweitern. —

Die Gleichung $y = F(x)$ läßt sich, wie leicht zu sehen, auf die mannigfaltigste Weise in die Form $x = f(x, y)$ bringen. Nehmen wir also an, das sei geschehen. Wenn man dann der Veränderlichen y den bestimmten Wert η gibt, und wenn jetzt die Iteration der Funktion $f(x, \eta)$ gegen einen bestimmten Wert ξ konvergiert, so besteht die Gleichung:

$$\xi = f(\xi, \eta),$$

also auch die Gleichung:

$$\eta = F(\xi).$$

Mithin ist für diesen Fall das Problem gelöst. Die Bedingung der Konvergenz heißt nach dem Früheren einfach:

$$|f'(\xi, \eta)| < 1.$$

Dieselbe steht in naher Beziehung zu jener Konvergenzgrenze, welche Cauchy für die „Reversionsformel“ von Lagrange gefunden hat. Cauchy bewies nämlich: Wenn eine Gleichung $x = y \cdot \varphi(x)$ gegeben ist, so geht die Konvergenz der aus dieser Gleichung abgeleiteten Reversionsformel für x nur bis zu demjenigen Werte von y , welcher bewirkt, daß die Gleichung $x = y \cdot \varphi(x)$ und ihre Derivierte eine gemeinschaftliche Wurzel bekommen. Diese Wurzel muß also der Gleichung $1 = y \cdot \varphi'(x)$ genügen, folglich ist an der Grenze der absolute Betrag von $y \cdot \varphi'(x)$ gleich der Einheit.

Wenn wir nun statt unserer obigen allgemeinen Funktion $f(x, y)$ die besondere Cauchy'sche Form $y \cdot \varphi(x)$ einsetzen, so sagt unsere allgemeine Konvergenzbedingung für diesen Sonderfall ebenfalls aus, daß an der Grenze der Konvergenz derjenige Wert von y steht, welcher bewirkt, daß der absolute Betrag von $y \cdot \varphi'(x)$ gleich der Einheit wird. Weil aber die Gleichung $y = F(x)$ auf sehr mannigfache Art in eine Form zu bringen ist, die der Gleichung $x = f(x, y)$ entspricht, so ist das Verfahren der Funktionswiederholung noch in vielen Fällen anwendbar, wo die Reversionsformel von Lagrange versagt. Beispiele dafür finden sich in meiner Abhandlung „über die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale“. Zeitschr. für Math. und Phys. Bd. XXXI.

§ 36. Die obige Konvergenzbedingung läßt sich noch in eine andere brauchbare Form bringen.

Aus der unentwickelten Gleichung:

$$x - f(x, y) = 0 \text{ folgt } \frac{dy}{dx} = - \frac{1 - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}},$$

während andererseits aus der ursprünglichen Form:

$$y = F(x) \text{ sich ergibt } \frac{dy}{dx} = F'(x).$$

Hiernach ist:

$$F'(x) \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 1 - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 1 - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot F'(x).$$

Sobald nun für y ein fester Wert angenommen ist, geht $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ in $\frac{df(x, y)}{dx}$ über, und die Konvergenzbedingung heißt:

$$\left| 1 - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot F'(x) \right| < 1.$$

Aus diesem Resultate ergibt sich für reelle Werte Folgendes:

1) In demjenigen Bereiche, wo für ein paar zusammengehörige Werte ξ und η die beiden Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ und $F'(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, ist die Umkehrung der Funktion $F(x)$ durch das einfache Iterationsverfahren unmöglich.

2) Haben die genannten beiden Differentialquotienten gleiches Vorzeichen, so kommt es auf das Vorzeichen von $\frac{d}{dx} f(\xi, \eta)$ — wofür der Kürze halber $f'(\xi, \eta)$ geschrieben werden soll — an. Ist dieses positiv, so ist auch $1 - \frac{\partial}{\partial y} f(\xi, \eta) \cdot F'(\xi)$ positiv, und dann ist die Konvergenz gesichert. Dieser Umstand verdient insofern Beachtung, als in dem bezeichneten Falle zur Erbringung des Konvergenzbeweises eine Bestimmung der Vorzeichen von Differentialquotienten genügt.

Ist aber das Vorzeichen von $f'(\xi, \eta)$ negativ, so ist die Konvergenz nur dann vorhanden, wenn:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(\xi, \eta) \cdot F'(\xi) < 2$$

ist. —

§ 37. Einzelne Beispiele mögen die Anwendbarkeit des entwickelten Gedankens darlegen.

Läßt bei der gegebenen Gleichung $y = F(x)$ die Funktion $F(x)$ sich als Potenzreihe darstellen, so kann man ersichtlichweise durch mancherlei Umformungen die Gestalt $x = f(x, y)$ hervorbringen. Daß es aber auch ohne Potenzreihe geht, ist sehr einfach zu zeigen. Halten wir uns z. B. zunächst an das

Paradigma von Cauchy, bei welchem y bloß als Faktor vor der unentwickelten Funktion steht, so können wir das leicht herstellen, indem wir aus $y = F(x)$ einfach bilden:

$$(A) \quad x = y \cdot \frac{x}{F(x)} = f_{(1)}(x, y).$$

Ebenso unmittelbar ergibt sich aus derselben Gleichung:

$$(B) \quad x = \frac{x \cdot F(x)}{y} = f_{(2)}(x, y).$$

Auch die durch bloß additive Verknüpfung erhaltene Form:

$$(C) \quad x = x + n(y - F(x)) = f_{(3)}(x, y)$$

ist nicht ohne Interesse, besonders noch deshalb, weil die darin vorkommende GröÙe n jeden beliebigen positiven oder negativen Wert erhalten, also für besondere Zwecke jedesmal passend ausgewählt werden darf.

Um nun die Konvergenzbedingungen festzustellen, bilden wir:

$$\text{bei (A)} \dots \frac{\partial}{\partial y} f_{(1)}(x, y) = \frac{x}{F(x)},$$

$$\text{bei (B)} \dots \frac{\partial}{\partial y} f_{(2)}(x, y) = - \frac{x \cdot F(x)}{y^2},$$

$$\text{bei (C)} \dots \frac{\partial}{\partial y} f_{(3)}(x, y) = n.$$

Also heißen die Konvergenzbedingungen:

$$\text{bei (A)} \dots \left| 1 - \frac{\xi \cdot F'(\xi)}{F(\xi)} \right| = \left| 1 - \frac{\xi}{\eta} \cdot F'(\xi) \right| < 1,$$

$$\text{bei (B)} \dots \left| 1 + \frac{\xi \cdot F(\xi) \cdot F'(\xi)}{\eta^2} \right| = \left| 1 + \frac{\xi}{\eta} \cdot F'(\xi) \right| < 1,$$

$$\text{bei (C)} \quad | 1 - n \cdot F'(\xi) | < 1.$$

Es kommt nun noch auf die Wahl zulässiger Anfangswerte an. — Die in § 17 hierfür aufgestellte Grenzgleichung $f(x) = v(x)$, bei welcher $v(x)$ aus $f(x)$ bekanntlich durch Auswechslung der Variabeln entsteht, bekommt in den vorliegenden drei Fällen eine ganz besondere Form.

Bilden wir bei (A) die Gleichung:

$$z = f_{(1)}(x, y) = x \cdot \frac{y}{F(x)},$$

so ergibt sich:

$$x = z \cdot \frac{y}{F(z)} = v_{(1)}(z, y).$$

Also erhält man durch Elimination von z

$$x = x \cdot \frac{y}{F(x)} \cdot \frac{y}{F\left(x \cdot \frac{y}{F(x)}\right)},$$

$$y \cdot \frac{y}{F(x)} = F\left(x \cdot \frac{y}{F(x)}\right).$$

Bei (B) erhält man auf dieselbe Weise die Gleichung:

$$y \cdot \frac{y}{F(x)} = F\left(x \cdot \frac{F(x)}{y}\right).$$

Bei (C) entsteht:

$$y + (y - F(x)) = F\{x + n(y - F(x))\}.$$

X.

Umkehrung von Kreisfunktionen. Verschiedene Darstellungsweisen der Zahl π durch Funktionswiederholung.

§ 38. Gegeben sei $y = F(x) = \sin x$. Der bei Darstellung der Konvergenzbedingung im § 37 aufgetretene Ausdruck $\frac{\xi}{\eta} F'(\xi)$ bekommt dann den Werth $\frac{\xi \cos \xi}{\sin \xi}$ oder $\frac{\xi}{\tan \xi}$, welcher im ersten Quadranten stets positiv und kleiner als die Einheit ist, mithin ist daselbst stets:

$$1 - \frac{\xi}{\eta} F'(\xi) < 1,$$

und für den Fall (A) ist die Konvergenz gesichert. Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$x = \arcsin y = \lim \left(y \cdot \frac{x}{\sin x} \right)$$

$$0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

Um sich nun noch über die zulässigen Anfangswerte von x_0 zu vergewissern, erwäge man, dafs:

$$f'(x, y) = \frac{d}{dx} \left(y \frac{x}{\sin x} \right) = \frac{y}{\sin x} \left(1 - \frac{x}{\tan x} \right)$$

im ersten Quadranten stets positiv ist. Daher steigt die Kurve in diesem Bereiche fortwährend, und eine Grenze für den zulässigen Anfangswert könnte daselbst nach den Entwicklungen des Kap. V nur dann vorhanden sein, wenn eine

zweite reelle Wurzel der Gleichung $y = \sin x$ dort existierte. Da das aber ersichtlicherweise nicht der Fall ist, so steht für x_0 zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ jede Wahl frei.

Aus diesem Resultate ergeben sich schon sofort zwei verschiedene Methoden, die Zahl π als Grenzwert einer Funktionswiederholung darzustellen. Setzen wir nämlich erstens $y = 1$, so ist:

$$x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = \lim \left(\frac{x}{\sin x} \right)$$

oder besser zweitens $y = \frac{1}{2}$, so ist:

$$x = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \lim \left(\frac{x}{2 \sin x} \right).$$

§ 39. Gegeben sei zweitens die Gleichung:

$$y = F(x) = \cos x.$$

In diesem Falle bekommt der Ausdruck $\frac{\xi}{\eta} F'(\xi)$ den Wert $-\frac{\xi \sin \xi}{\cos \xi} = -\xi \tan \xi$, welcher im ersten Quadranten stets negativ ist. Demnach wird für den Fall (B) die Konvergenz gesichert sein, so lange $1 - \xi \tan \xi < 1$, oder, was dasselbe besagt, $0 < \xi \tan \xi < 2$ ist.

Die Grenze, wo das Produkt aus dem Bogen und seiner trigonometrischen Tangente gleich 2 wird, liegt zwischen 61° und 62° , also ist die Iteration noch konvergent für:

$$x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

Hieraus ergibt sich als dritte Bestimmung für π die Gleichung:

$$x = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = \lim \left(\frac{x \cdot \cos x}{\frac{1}{2}} \right) = \lim (2x \cos x).$$

Als Anfangswert x_0 kann auch hier wiederum jeder Bogen des ersten Quadranten gewählt werden, doch der Beweis hierfür ist nicht sehr einfach. Ein Weg, um zu dieser Einsicht zu gelangen, ist folgender:

Wenn man eine Kurve $u = 2x \cdot \cos x$ darstellt und dazu

die Wurzelachse $u = x$ konstruiert, so schneidet erstere die letztere offenbar im Punkte $x = \frac{\pi}{3}$. Nun ist

$$\frac{du}{dx} = 2 \cos x (1 - x \cdot \tan x).$$

Setzt man in diesen Ausdruck statt x den Wert $\frac{\pi}{3}$ ein, so ist sowohl $x > 1$ als auch $\tan x > 1$. Mithin ist der Wert von $\frac{du}{dx}$ an diesem Punkte ein negativer, d. h. die Kurve fällt daselbst. Daraus folgt, daß bezüglich der Wahl des Anfangswertes von x die Grenzgleichung $f(x) = v(x)$ aufgestellt und untersucht werden muß.

Nach dem, was am Schlusse von § 37 über diese Grenzgleichung gesagt ist, hat dieselbe in dem hier vorliegenden Falle (B) und für den besonderen Wert $y = \frac{1}{2}$ die Form:

$$\frac{1}{4 \cos x} = \cos (2 x \cdot \cos x).$$

Nun fragt sich, ob dieselbe außer $\frac{\pi}{3}$ im ersten Quadranten noch eine andere reelle Wurzel hat.

Während x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, nehmen die Werte der linken Seite stetig zu von $\frac{1}{4}$ bis ∞ . Die Werte der rechten Seite beginnen mit 1 und schließen mit 1. Unterwegs erreichen sie ein Minimum an der Stelle, wo $1 - x \tan x = 0$ ist. Der zugehörige Wert von x liegt zwischen 49° und 50° . An dieser Minimalstelle hat der Wert der linken Seite den der rechten Seite noch nicht erreicht. Das geschieht erst bei 60° , und von diesem Punkte ab sind und bleiben die Werte der linken Seite stets größer als die der rechten. Daraus folgt, daß im ersten Quadranten die Gleichung $f(x) = v(x)$ keine weitere reelle Wurzel besitzt, also existiert daselbst auch keine Grenze für die Wahl des Anfangswertes bei der Relation:

$$\frac{\pi}{3} = \lim (2 x \cdot \cos x).$$

§ 40. Um nun auch eine Anwendung der Form (C) zu zeigen, möge nochmals der Cosinus benutzt werden. Sei also $y = F(x) = \cos x$ gegeben, so hat man nach § 37:

$$x = f_{(3)}(x, y) = x + n(y - \cos x).$$

Die Konvergenzbedingung heisst:

$$|1 - n F'(\xi)| = |1 + n \sin \xi| < 1.$$

Diese kann unter allen Umständen erfüllt werden, weil n eine ganz beliebige Zahl ist. — Als ein vorzügliches Mittel, die Konvergenz zu sichern, bietet sich die Wahl:

$$n = -\frac{1}{\sin x}.$$

Denn in diesem Falle wird am Punkte $x = \xi$ der Ausdruck $|1 + n \sin \xi|$ die Form $\left|1 - \frac{\sin \xi}{\sin \xi}\right|$ annehmen, mithin gleich Null sein.

Für den gewählten Wert von n ergibt sich nun:

$$f_{(3)}(x, y) = x - \frac{y - \cos x}{\sin x},$$

und da die Konvergenz gesichert ist, so besteht für einen beliebigen Wert η von y die Inversionsgleichung:

$$\arccos \eta = \lim \left(x - \frac{\eta - \cos x}{\sin x} \right).$$

Wenn wir hier als besonderen Fall z. B. das Wertepaar:

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = \cos x = 0$$

wählen, so erhalten wir als eine neue Relation für π die Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} = \lim (x + \cotang x).$$

Um nun noch über die zulässigen Anfangswerte x_0 etwas Sicheres zu ermitteln, betrachten wir die Kurve:

$$u = x + \cotang x.$$

Dieselbe besteht aus unendlich vielen einander kongruenten Teilen. Jeder Teil kommt bei einem der Werte $x = m\pi$ (wobei m alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft) aus dem positiv Unendlichen und strebt mit wachsendem x bei dem Werte $x = (m + 1)\pi$ dem negativ Unendlichen zu. Dabei wird die Wurzelachse $u = x$ stets in der Mitte des betreffenden Intervalls, also bei einem Multiplum von $\frac{\pi}{2}$ geschnitten, und die Kurve ist an diesem Schnittpunkte stets parallel der X-Achse.

Aus diesem Verlaufe geht deutlich hervor, daß in jedem dieser Intervalle Kurve und Spiegelbild sich außer auf der Wurzelachse auch noch in zwei anderen Punkten schneiden müssen. Die Gleichung $f(x) = v(x)$, welche diese Werte liefert, hat unter Berücksichtigung, daß:

$$y = 0, \quad F(x) = \cos x, \quad n = -\frac{1}{\sin x}$$

ist, nach § 37 die Form:

$$-\cos x = \cos \left\{ x - \frac{1}{\sin x} (-\cos x) \right\} = \cos (x + \cot x).$$

Fassen wir von den Wurzeln dieser Gleichung die zwischen 0 und π liegenden Werte von x ins Auge, so besteht für dieselbe die Relation:

$$\pi - x = x + \cot x \quad \text{oder} \quad 2x + \cot x = \pi.$$

Nehmen wir an, ein bestimmter Wert x_α genüge dieser Gleichung, d. h. es sei:

$$2x_\alpha + \cot x_\alpha = \pi,$$

dann genügt $x_\beta = \pi - x_\alpha$ derselben Gleichung ebenfalls, denn:

$$\begin{aligned} 2x_\beta + \cot x_\beta &= 2(\pi - x_\alpha) + \cot(\pi - x_\alpha) = 2\pi - 2x_\alpha - \cot x_\alpha \\ &= 2\pi - (2x_\alpha + \cot x_\alpha) = 2\pi - \pi = \pi. \end{aligned}$$

Es ist nicht schwer, die Werte für x_α und x_β mit beliebiger Genauigkeit zu beziffern. Dieselben sind annähernd 0,4053... und 2,7363... Zwischen diesen beiden Grenzen kann also der Anfangswert der Iteration beliebig gewählt werden. Also ist z. B. für

$x_0 = \frac{1}{2}$ oder $= 1$ oder $= 1\frac{1}{2}$ oder $= 2$ oder $= 2\frac{1}{2}$
stets zuverlässig:

$$\frac{\pi}{2} = \lim (x + \cot x).$$

XI.

Umkehrung des Logarithmus und der Exponentialfunktion. Ausdrücke für die Basis e des natürlichen Logarithmensystems.

§ 41. Es sei gegeben die Gleichung:

$$y = F(x) = \log x,$$

wobei als Basis des logarithmischen Systems irgend eine von

Null und Eins verschiedene positive Zahl b vorausgesetzt wird. Dann ist $x = b^y$.

Weil $F'(x) = \frac{\log e}{x}$, so ist der in den Formeln des § 37 benutzte Ausdruck:

$$\frac{\xi}{\eta} \cdot F'(\xi) = \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\log e}{\xi} = \frac{\log e}{\eta},$$

also wird die Form (A) brauchbar sein, wenn

$$\left| 1 - \frac{\log e}{\eta} \right| < 1, \text{ also } 0 < \frac{\log e}{\eta} < 2,$$

hingegen die Form (B), wenn

$$\left| 1 + \frac{\log e}{\eta} \right| < 1, \text{ also } -2 < \frac{\log e}{\eta} < 0 \text{ ist.}$$

Aus diesen beiden Relationen zusammen geht hervor, daß der Wert von η nicht gewählt werden darf in dem Zwischenraume zwischen $+\frac{1}{2} \log e$ und $-\frac{1}{2} \log e$, oder, was dasselbe besagt, daß:

$$\sqrt{\frac{1}{e}} < \xi < \sqrt{e}$$

ausgeschlossen ist. Dieselben Relationen sagen auch aus, daß $\left(\frac{\log e}{\eta}\right)^2 < 4$ sein muß.

Nehmen wir zuerst den Fall $\xi > \sqrt{e}$, also $\eta > \frac{1}{2} \log e$, dann ist mit sicherer Konvergenz (§ 37 Form (A))

$$x = b^\eta = \lim \left(\eta \frac{x}{\log x} \right).$$

Bezüglich des Anfangswertes x_0 ist zunächst darauf hinzuweisen, daß weder $x_0 = 1$, noch $x_0 < 1$ gewählt werden darf, wie aus der Natur der zu iterierenden Funktion sofort hervorgeht.

Ferner überzeugt man sich durch Differentiation der letzteren auf leichte Weise davon, daß der Differentialquotient am Wurzelpunkte $\eta = \log \xi$ möglicherweise negativ ausfallen kann, daß also die Grenzgleichung $f(x) = v(x)$ zu untersuchen ist.

Diese hat die Form:

$$\eta \cdot \frac{\eta}{\log x} = \log \left(x \cdot \frac{\eta}{\log x} \right) = \log x + \log \left(\frac{\eta}{\log x} \right),$$

$$\text{oder } \eta \left(\frac{\eta}{\log x} - \frac{\log x}{\eta} \right) = \log \left(\frac{\eta}{\log x} \right).$$

Bezeichnet man der Kürze halber den Quotienten $\frac{\eta}{\log x}$ mit q , so entsteht:

$$q - \frac{1}{q} = \frac{\log q}{\eta},$$

und nun handelt es sich um die Frage, ob aufser dem selbstverständlichen Werte $q = 1$ noch eine weitere, endliche, reelle Wurzel dieser Gleichung existiert.

Wir denken uns zwei Kurven:

$$1) \ z = q - \frac{1}{q} \quad \text{und} \quad 2) \ z = \frac{\log q}{\eta}.$$

Negative Werte von q sind von selbst ausgeschlossen, weil für diese die Funktion $\log q$ nicht reell bleibt. Für alle positiven Werte von q sind beide Funktionen eindeutig und stetig.

Die bezeichneten Kurven schneiden sich in dem Punkte $q = 1$, aber ihre Tangenten an diesem Punkte divergieren. Wenn nun die Kurven sich noch in einem zweiten Punkte $q = t$ schneiden, so müßten die Tangenten in dem Intervall, worin q den Weg von 1 bis t zurücklegt, wieder konvergent geworden sein, also müßte es mindestens eine Stelle geben, wo dieselben einander parallel sind. An dieser Stelle aber müßte sein

$$\frac{d}{dq} \left(q - \frac{1}{q} \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{\log q}{\eta} \right), \quad \text{also} \quad 1 + \frac{1}{q^2} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\log e}{\eta}.$$

Hieraus würde sich ergeben:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} \frac{\log e}{\eta} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\log e}{\eta} \right)^2 - 1}.$$

Da nun nach dem Vorigen $\left(\frac{\log e}{\eta} \right)^2 < 4$ ist, so sind die Werte von $\frac{1}{q}$ komplex.

Damit ist die Möglichkeit einer zweiten reellen Wurzel der Gleichung:

$$q - \frac{1}{q} = \frac{\log q}{\eta}$$

ausgeschlossen. Also konvergiert die Iteration stets, wenn nur der Anfangswert größer als Eins gewählt wird.

§ 42. Nunmehr können wir auch den Wert von b gleich der Basis e des natürlichen Logarithmensystems setzen. Dann ergibt sich als Sonderfall:

$$e^\eta = \lim \left(\eta \frac{x}{\ln x} \right) \quad \text{für } \eta > \frac{1}{2} \quad \text{und } x_0 > 1.$$

Wird jetzt noch $\eta = 1$ gewählt, so haben wir

$$e = \lim \left(\frac{x}{\ln x} \right).$$

Damit ist also der Satz abgeleitet: Wenn man irgend eine Zahl, welche größer als 1 ist, durch ihren natürlichen Logarithmus dividiert, das Ergebnis wiederum durch seinen natürlichen Logarithmus dividiert u. s. w., dann erhält man mit beliebiger Genauigkeit die Basis e des natürlichen Logarithmensystems.

Man könnte daran denken, diesen Satz und die vorstehende Gleichung auch mit Hülfe einer, den Bruch-, Potenz- und Wurzelketten ähnlich gebildeten Logarithmenkette darzustellen. Dies würde unter Zuziehung eines bestimmten Anfangswertes möglich, aber nicht sehr übersichtlich sein. Die Formel $e = \lim \left(\frac{x}{\ln x} \right)$ drückt den Gedanken unvergleichlich viel anschaulicher aus. —

Durch die im vorigen Paragraphen benutzten Mittel kann man auch den zweiten Fall:

$$\xi < \sqrt[n]{\frac{1}{e}} \quad \text{oder} \quad \eta < -\frac{\log e}{2}$$

erledigen. Es bietet sich dabei ein Weg dar, den reciproken Wert von e als Grenze einer konvergenten Funktionswiederholung von der Form (B) darzustellen.

§ 43. Als Beispiel für die Anwendung der Form (C) werde nunmehr gesetzt:

$$y = F(x) = e^x.$$

Dann ergibt sich aus § 37

$$x = \ln y = x + n(y - e^x).$$

Die Konvergenzbedingung heißt:

$$|1 - ne^x| < 1.$$

Um ihrer Erfüllung sicher zu sein, wählen wir für die freie Zahl n den Wert $\frac{1}{e^x}$, und erhalten als zuverlässig konvergent:

$$\ln \eta = \lim \left(x + \frac{\eta - e^x}{e^x} \right) = \lim (x - 1 + \eta \cdot e^{-x}).$$

Die Grenzggleichung für die Anfangswerte wird in vorliegendem Falle zweckmäfsig unmittelbar aus der Formel $f(x) = v(x)$ abgeleitet, indem man setzt:

$$s = f(x) = x - 1 + \eta \cdot e^{-x},$$

woraus durch Vertauschung der Variabeln die Gleichung des Spiegelbildes entsteht:

$$x = v(s) = s - 1 + \eta \cdot e^{-s}.$$

Die Elimination von s liefert die Grenzggleichung:

$$x = x - 1 + \eta \cdot e^{-x} - 1 + \frac{\eta}{e^{x-1} + \eta \cdot e^{-x}}.$$

Diese läfst sich durch zweckmäfsige Umformungen in die Gestalt bringen:

$$e^{\eta \cdot e^{-x} - 1} = \frac{1 + (\eta \cdot e^{-x} - 1)}{1 - (\eta \cdot e^{-x} - 1)},$$

woraus durch die Substitution $\eta \cdot e^{-x} - 1 = z$ entsteht:

$$z = \ln \frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots$$

Dafs diese Gleichung aufser $z = 0$ keine reellen Wurzeln haben kann, ist ersichtlich.

Der Fall $z = 0$ oder $\eta = e^x$ bezeichnet also die einzig vorhandene reelle Wurzel, und man erkennt, dafs die Grenzggleichung keine Schranke für die Wahl des Anfangswertes x_0 liefert. —

Die vorhin abgeleitete Formel:

$$\ln \eta = \text{limit } (x - 1 + \eta \cdot e^{-x})$$

gestattet auch, jede beliebige reelle Zahl r als Grenze einer konvergenten Funktionswiederholung darzustellen. Denn setzt man $\eta = e^r$, so ergibt sich:

$$\ln(e^r) = r = \text{limit } (x - 1 + e^{r-x}).$$

§ 44. Ein letztes Beispiel soll nun noch vorgenommen werden, um daran zu zeigen, dafs der Logarithmus sich auch nach der Formel (C) umkehren läfst.

Setzen wir also, wie in § 41, wiederum:

$$y = F(x) = \log x; \quad x = b^y,$$

so kommt:

$$x = x + n(y - \log x).$$

Weil die Bedingung der Konvergenz jetzt heisst:

$$\left| 1 - n \frac{\log e}{\xi} \right| < 1,$$

so wählen wir, um letztere sicher zu stellen,

$$n = \frac{x}{\log e}$$

und können nunmehr setzen:

$$b^n = \lim \left[x + \frac{x}{\log e} (\eta - \log x) \right] = \lim \left[x \left(1 + \frac{\eta - \log x}{\log e} \right) \right].$$

Als Grenzggleichung für den Anfangswert ergibt sich auf dem in § 41 eingeschlagenen Wege:

$$x = x \left(1 + \frac{\eta - \log x}{\log e} \right) \left[1 + \frac{\eta - \log \left(x \left(1 + \frac{\eta - \log x}{\log e} \right) \right)}{\log e} \right].$$

Man setzt $1 + \frac{\eta - \log x}{\log e} = \xi$ und erhält:

$$1 = \xi \left(1 + \frac{\eta - \log (x \cdot \xi)}{\log e} \right) = \xi \left(1 + \frac{\eta - \log x - \log \xi}{\log e} \right),$$

also:

$$\frac{1}{\xi} = \xi - \frac{\log \xi}{\log e} = \xi - \ln \xi,$$

mithin:

$$\ln \xi = \xi - \frac{1}{\xi}.$$

Dafs diese Gleichung aufser 0 und 1 keine reelle Wurzel besitzt, läfst sich nun wieder auf dem in § 41 benutzten Wege nachweisen.

Der Wert $\xi = 1$ entspricht demjenigen Werte von x , gegen welchen die Iteration konvergiert. Der Wert $\xi = 0$ bezeichnet also eine Grenze für die Wahl des Anfangswertes x_0 . Dieselbe bestimmt sich durch die Gleichung:

$$\xi = 1 + \frac{\eta - \log x}{\log e} = 0,$$

woraus:

$$\log x = \log e + \eta; \quad x = b^{\log e + \eta}.$$

Andererseits bildet ersichtlicherweise aber auch $x = 0$ eine Grenze, weil für $x < 0$ sich für $\log x$ kein reeller Wert mehr ergibt.

Aus dem vorstehend Entwickelten folgt nun z. B. für das Briggs'sche Logarithmensystem:

$$10^\eta = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 + \frac{\eta - \log x}{\log e} \right) \right],$$

$$0 < x_0 < 10^{\log e + \eta}.$$

Für das natürliche System hat man:

$$e^\eta = \lim_{x \rightarrow 0} [x (1 + \eta - \ln x)],$$

$$0 < x_0 < e^{1 + \eta}.$$

Und wenn hierin noch $\eta = 1$ gesetzt wird, so kommt:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} [x (2 - \ln x)],$$

$$0 < x_0 < e^2.$$

XII.

Beseitigung der ersten Konvergenzgrenze durch zweckmäfsig angepaßte Näherungswerte.

§ 45. Die Reihe der Anwendungen hier unterbrechend, wollen wir nunmehr an die fünf ersten Kapitel wieder anknüpfen und die dort gegebenen allgemeinen Erörterungen durch Einführung eines neuen Gedankens erweitern.

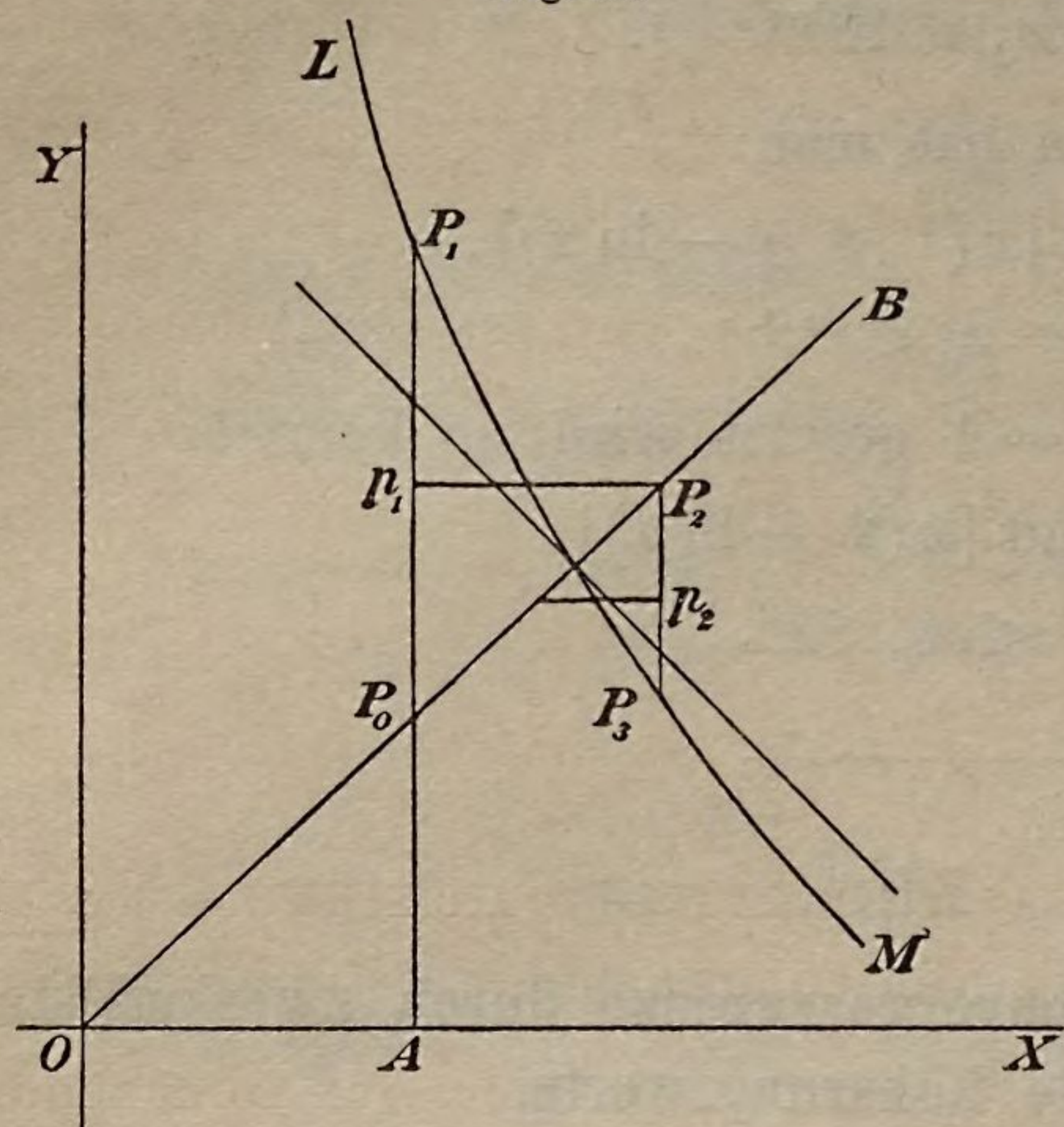
Aus der in § 5 entwickelten geometrischen Anschauung ergab sich, daß die Iteration nur dann konvergent ist, wenn von einem Wurzelpunkte P_ω aus die Kurve $y = f(x)$ in diejenigen beiden Quadranten hineinläuft, welche „centripetale“ genannt und in Fig. 16 durch Schraffierung von den beiden centrifugalen Quadranten ausgezeichnet worden sind. Über dieses Gebiet, algebraisch durch die Bestimmung $|f'(x)| < 1$ dargestellt, konnte bisher das Verfahren der Funktionswiederholung nicht hinaus.

Nun ist es aber, wie gezeigt werden soll, möglich, den Verlauf der Iteration in die centripetalen Quadranten hineinzuzwingen, wenn auch die Kurve $y = f(x)$ von P_ω aus thatsächlich in die centrifugalen Quadranten hineinläuft. — Zunächst möge ein Beispiel das Princip erläutern.

Die Kurve LM (Fig. 56) sei durch $y = f(x)$ dargestellt, sie schneide die Wurzelachse OB in irgend einem Punkte P_ω ,

gehe von dort aus aber in die centrifugalen Quadranten hinein. Man wähle in genügender Nähe bei x_w einen Wert $x_1 = OA$, konstruiere in A das Lot bis zum Durchschnittspunkte P_1 mit LM , so ist

Fig. 56.



punkte P_1 mit LM , so ist

$$AP_1 = f(x_1).$$

Bezeichnet man den Durchschnitt dieser Ordinate und der Wurzelachse mit P_0 , so ist $AP_0 = OA = x_1$ also die Strecke

$$P_0P_1 = f(x_1) - x_1.$$

Nun halbieren wir letztere in p_1 , so ist

$$p_1P_1 = \frac{1}{2}[f(x_1) - x_1],$$

also:

$$Ap_1 = f(x_1) - \frac{1}{2}[f(x_1) - x_1] = \frac{1}{2}[f(x_1) + x_1].$$

Diese Größe ist offenbar, sobald der Näherungswert $f(x_1)$ gefunden, sehr leicht zu bestimmen; ich nenne sie einen angepassten Näherungswert. — Der Unterschied dieses „angepassten“ von dem ursprünglichen und einfachen Näherungswerte beträgt $-\frac{1}{2}[f(x_1) - x_1]$.

In der Fig. 56 liegt nun der Punkt p_1 innerhalb eines centripetalen Quadranten. Wenn wir von ihm aus die erste Brücke p_1P_2 , von P_2 die zweite Brücke P_2P_3 schlagen und letztere in p_2 halbieren, so ist die Ordinate dieses Punktes p_2 der zweite angepasste Näherungswert $\frac{1}{2}[f(x_2) + x_2]$. Konstruieren wir von p_2 aus — welcher Punkt wieder innerhalb eines Konvergenzquadranten liegt — die dritte Brücke und fahren in derselben Weise fort, so haben wir die Spirale, welche nach dem einfachen Iterationsverfahren notwendig centrifugal verlaufen wäre, in die centripetalen Quadranten hinein gezwungen, haben also durch zweckmäßig angepasste Näherungswerte die Iteration konvergent gemacht.

Wir stehen demnach jetzt vor der Frage, ob die in diesem Beispiele gelungene Beseitigung der Konvergenzschranke eine allgemeine Bedeutung hat.

§ 46. P_w in Fig. 57 sei ein Wurzelpunkt der Kurve $y = f(x)$ und P_1 irgend ein in dessen Nähe befindlicher anderer Punkt derselben Kurve.

Läuft nun von P_w aus die Kurve in die centrifugalen Quadranten hinein, so befindet ein Punkt P_1 dieser Kurve sich in einer von den vier verschiedenen Lagen, in welchen die Figur 57 ihn darstellt.

Man ziehe zur Y -Achse durch P_1 eine Parallele, welche die Wurzelachse in P_0 schneiden möge, wähle auf dieser Parallele oder deren Verlängerung einen innerhalb der centripetalen Quadranten gelegenen Punkt und bezeichne ihn mit p_1 .

Nun hat die Ordinate des Kurvenpunktes P_1 offenbar den Wert $f(x_1)$, während die des Punktes $P_0 = x_1$ ist. Demnach ist $P_0P_1 = f(x_1) - x_1$, wenn P_1 oberhalb P_0 , und es ist $P_0P_1 = x_1 - f(x_1)$, wenn P_1 unterhalb P_0 liegt. — Möge jetzt die Strecke $p_1P_1 = k \cdot P_0P_1$ gesetzt und die Ordinate des Punktes p_1 mit y_k bezeichnet werden, so ist im ersten Falle:

$$y_k = f(x_1) - p_1P_1 = f(x_1) - k[f(x_1) - x_1],$$

im zweiten Falle ist:

$$y_k = f(x_1) + p_1P_1 = f(x_1) + k[x_1 - f(x_1)].$$

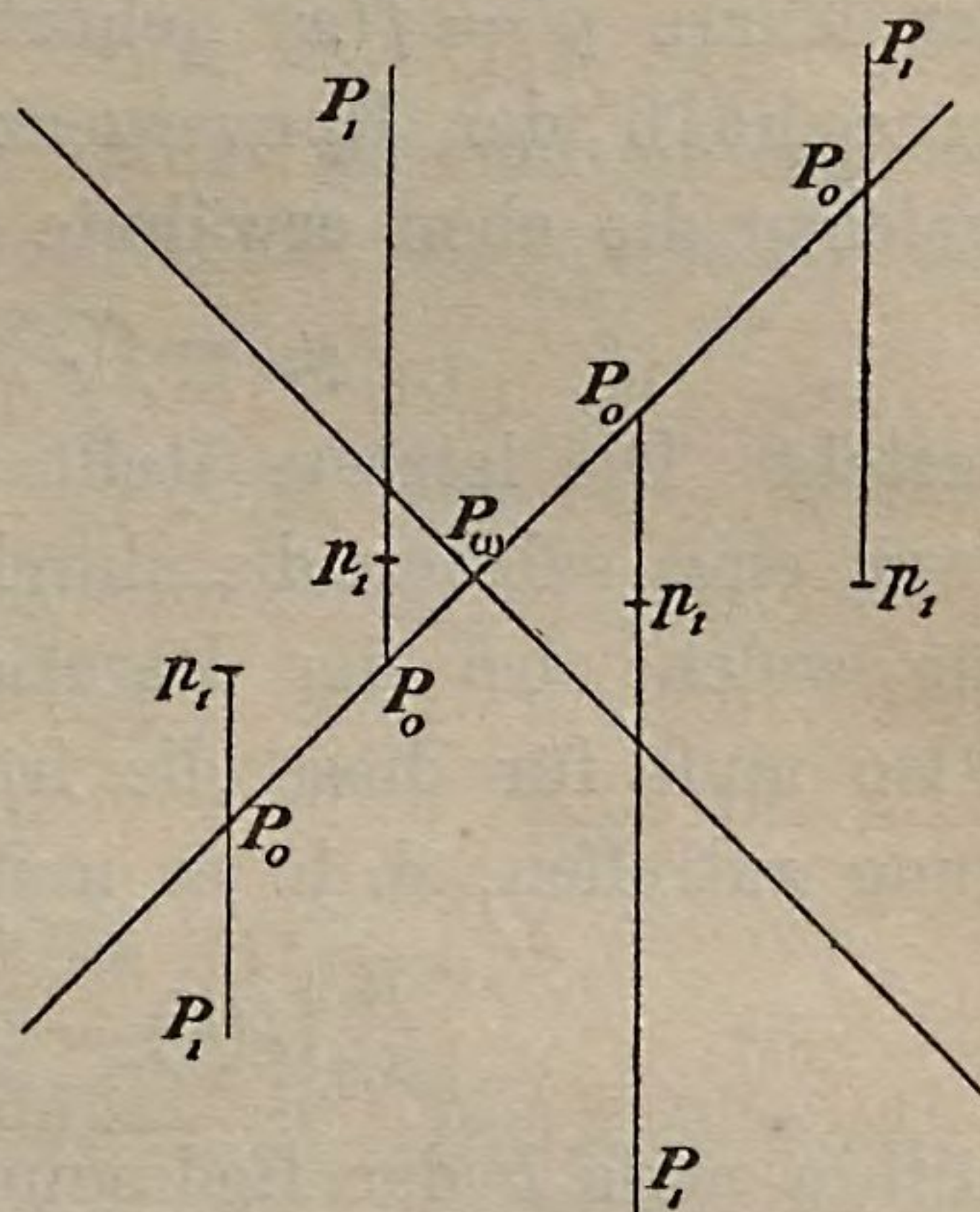
Beide Ausdrücke für y_k sind offenbar identisch.

Nun folgt: Mag die Kurve $y = f(x)$ außerhalb der centripetalen Quadranten eine Lage haben, welche sie will, immer läßt sich zu jedem ihrer Punkte ein über derselben Abscisse liegender zweiter Punkt bestimmen, dessen Ordinate

$$y_k = f(x) - k[f(x) - x]$$

ist, und wenn hierbei die Gröfse k richtig gewählt wird, so

Fig. 57.



liegt der jedesmalige zweite Punkt innerhalb der centripetalen Quadranten.

Um also die Konvergenz der „angepaßten Näherungswerte“ zu sichern, kommt es darauf an, ein Gesetz zu finden, nach welchem k zweckmäfsig zu wählen ist.

§ 47. Zu jedem in der Nähe von P_ω gelegenen Punkte der Kurve $y = f(x)$ gehört bei passender Wahl von k ein innerhalb der Konvergenzquadranten gelegener Punkt, für welchen die eben erwähnte Gleichung:

$$y_k = f(x) - k[f(x) - x]$$

besteht. Die letztere stellt also ebenfalls eine Kurve dar, und zwar eine solche, die durch denselben Punkt P_ω geht, und für welche bei der Iteration die Konvergenz gesichert ist. Also muß für diese die früher entwickelte Konvergenzbedingung zutreffen, d. h. es muß sein:

$$\left| \frac{d}{dx} \{ f(x) - k[f(x) - x] \} \right| < 1,$$

mithin muß k der Bedingung genügen:

$$| f'(x) - k[f'(x) - 1] | < 1.$$

Stellen wir hiernach die Grenzen fest, so ist die erste gegeben durch die Gleichung:

$$f'(x) - k[f'(x) - 1] = 1, \text{ also } k = 1.$$

Die zweite ergibt sich aus der Gleichung:

$$f'(x) - k[f'(x) - 1] = -1, \text{ oder } k = \frac{f'(x) + 1}{f'(x) - 1}.$$

Die erste Grenzbestimmung hat folgenden Sinn: Je näher der Wert von k an die positive Einheit heranrückt, desto mehr rückt offenbar der Wert von y_k an den Wert von x , also der innerhalb der Konvergenzquadranten gewählte Punkt p an die Wurzelachse heran. Um so langsamer schreitet aber auch die Annäherung vorwärts, und bei der Wahl $k = 1$ steht sie überhaupt still.

Der zweite Grenzwert $\frac{f'(x) + 1}{f'(x) - 1}$ kann kleiner oder größer als die Einheit, er kann positiv oder negativ sein, je nach dem Werte von $f'(x)$.

Im Falle $f'(x)$ zwischen $+1$ und -1 liegt, wird er negativ, also ist k dann zwischen der positiven Einheit einer-

seits und irgend einem negativen Werte andererseits auszuwählen, folglich geht es auch an, $k = 0$ zu setzen. Und in der That, wenn der Wert von $f'(x)$ sich zwischen $+1$ und -1 befindet, so liegt ja die Kurve $y = f(x)$ selber schon innerhalb des Konvergenzbereichs, also darf die „angepaßte“ Iteration $f(x) - k[f(x) - x]$ auch zur einfachen it $f(x)$ zurückkehren.

§ 48. Ein interessantes Beispiel möge das hier Gesagte erläutern. Herr Netto schreibt (a. a. O. S. 302): „Wenn wir z. B. die Gleichung:

$$f = z^2 + z - 2 = (z - 1)(z + 2) = 0$$

betrachten und den Algorithmus der Näherung

$$z_{\lambda+1} = \frac{2 - z_{\lambda}^3}{2z_{\lambda} - 1}$$

setzen, dann wird zwar die Gleichung

$$\xi = \frac{2 - \xi^3}{2\xi - 1}$$

durch die beiden Wurzeln $\xi = +1$ und $\xi = -2$ von $f = 0$ befriedigt, aber der Anfangswert $z_1 = -1,99$ z. B. führt auf einen fremden Wert als Grenze:

$$z_2 = -1,78 \dots \quad z_3 = -1,68 \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1,$$

was sich dadurch erklärt, daß

$$z - \frac{2 - z^3}{2z - 1} = f(z) \cdot \frac{z + 1}{2z - 1} = f(z) \cdot g(z)$$

ist. Die Wurzel $\xi = -2$ ist hier überhaupt nicht einer asymptotischen Annäherung fähig, und das Gleiche gilt für $\xi = 1$.“ —

Was Herr Netto hier sagt, ist selbstverständlich unter der Voraussetzung zu nehmen, daß aus der Gleichung:

$$z^2 + z - 2 = 0$$

Jemand auch gerade den obigen Näherungsalgorithmus:

$$z_{\lambda+1} = \frac{2 - z_{\lambda}^3}{2z_{\lambda} - 1}$$

gebildet habe; man könnte ja augenscheinlich auch ganz andere, dazu einfachere Algorithmen bilden und daraus die Wurzel $\xi = -2$ zweifellos erhalten.

Nutzen ist, wo die einfache Iteration überhaupt nicht konvergiert, sondern auch da, wo sie konvergiert. Eine Beschleunigung der Annäherung ist dadurch immer erzielbar, den einen Fall etwa ausgeschlossen, wo der Differentialquotient der gegebenen Funktion am Wurzelpunkte schon von selbst verschwindet.

§ 50. Die bisher dargelegte Methode der angepassten Iteration benutzt denjenigen Wert, welchen der Differentialquotient der Funktion $f(x)$ an dem erstrebten Wurzelpunkte der Gleichung $x = f(x)$ besitzt; sie versagt also, wenn dieser Wert nicht bekannt ist und auch nicht einigermaßen abgeschätzt werden kann. Demnach wäre zu überlegen, ob nicht etwa ohne ihn doch auch noch eine Möglichkeit besteht, die einfache Iteration, falls sie divergent ist, durch Anpassung der Näherungswerte konvergent zu machen, oder falls sie konvergent ist, die Annäherungen zu beschleunigen.

Zu diesem Zweck greife ich jetzt auf einen im § 3 schon angeregten Punkt zurück.

Nehmen wir an, man habe auf der Kurve $y = f(x)$ einen Punkt P_1 bestimmt, dessen Koordinaten x_1 und $f(x_1) = x_2$ sind, habe sodann einen Punkt P_2 bestimmt, dessen Koordinaten x_2 und $f(x_2) = x_3$ sind, und ziehe nun durch P_1 und P_2 eine Sekante, welche die Wurzelachse im Punkte P_s schneiden möge, dessen Abscisse mit x_s bezeichnet werden soll. — Nun liefert die Gleichung dieser Sekante:

$$\frac{y - x_2}{x - x_1} = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_2},$$

kombiniert mit der Gleichung der Wurzelachse den Wert

$$x_s = \frac{x_1 \cdot x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2x_2}.$$

An dieser Formel ist äußerlich bemerkenswert, daß der Nenner in gewissem Sinne der Differentialquotient des Zählers ist. Man könnte dieselbe auch mit der alten regula falsi in Beziehung bringen.

Daß mit Hülfe dieses angepassten Näherungswertes x_s die Konvergenz der Iteration erzwungen wird in allen Fällen, wo die einfache Iteration von $f(x)$ wegen Überschreitung der Konvergenzgrenze divergent ausfallen muß, steht

aufser Zweifel, und man kann es sich durch Zeichnung steiler Kurven und deren Sekanten veranschaulichen. Dafs aber, im Falle die Iteration von $f(x)$ schon konvergent ist, der Näherungswert x_s die Annäherung stets beschleunige, kann nicht behauptet werden, wohl aber Folgendes: Entweder liefert x_s

Fig. 58.

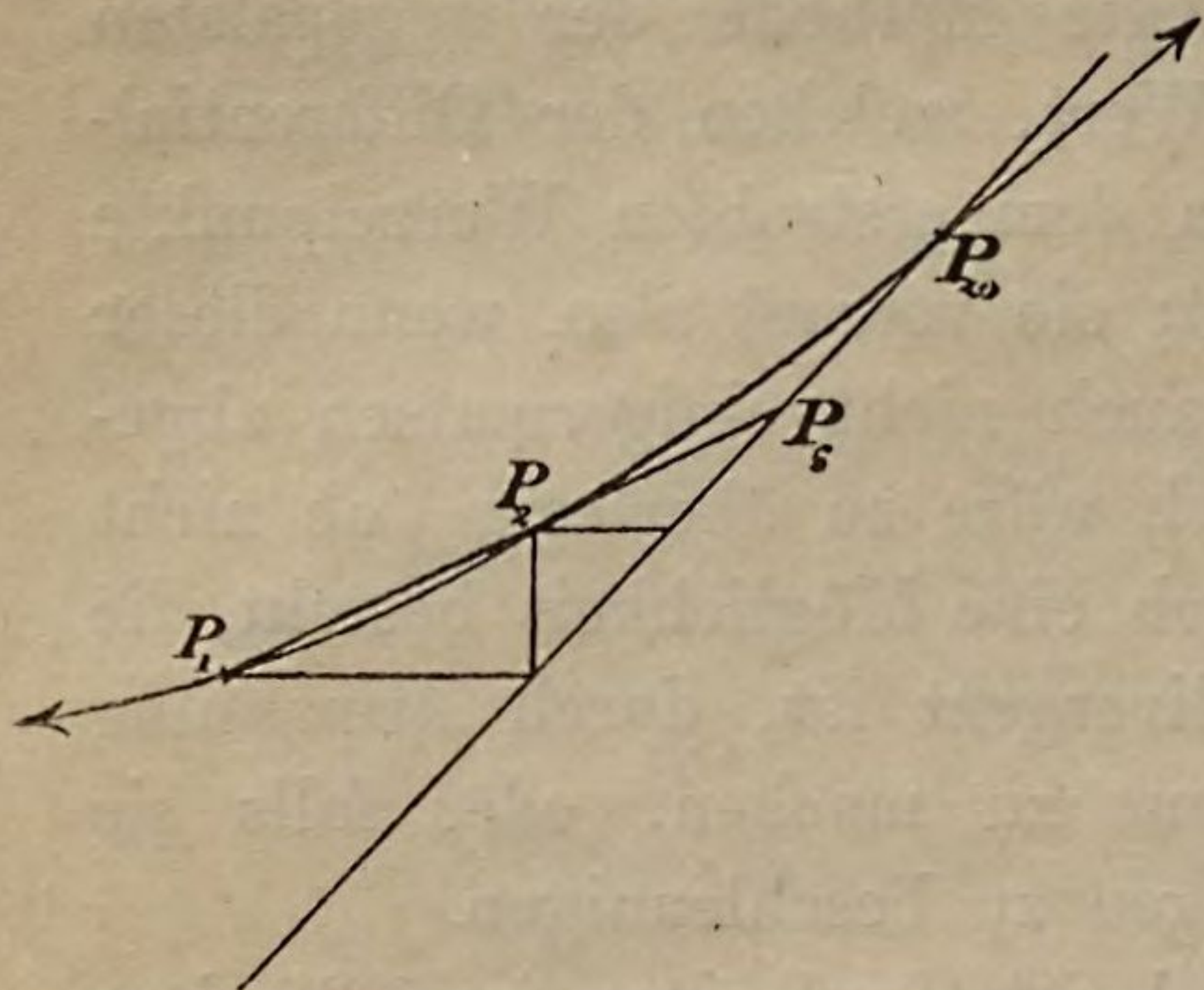
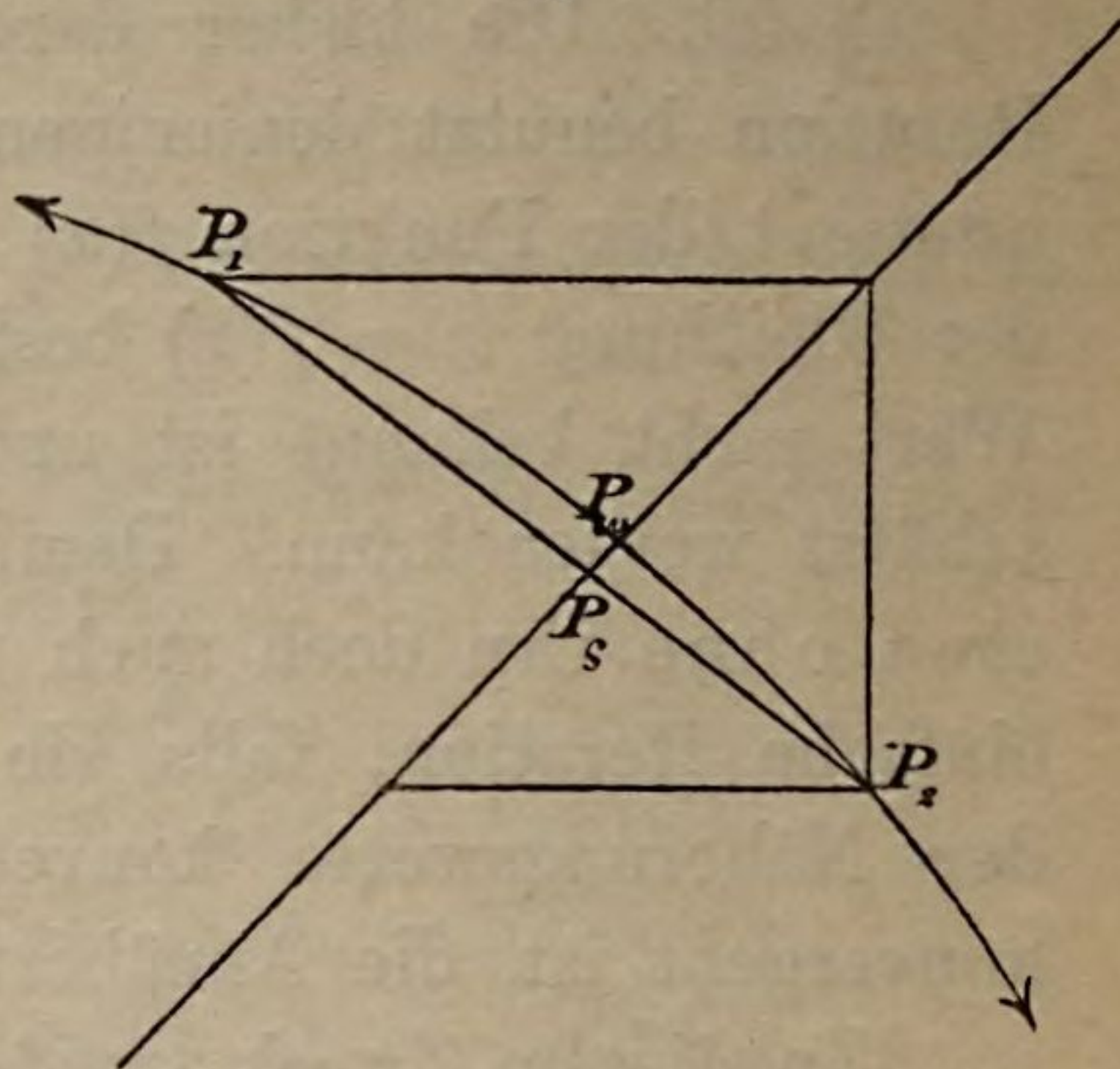


Fig. 59.



einen besseren Näherungswert als die einfache Iteration von $f(x)$ (Fig. 58 und 59), oder x_s liefert einen jenseitigen

Fig. 60.

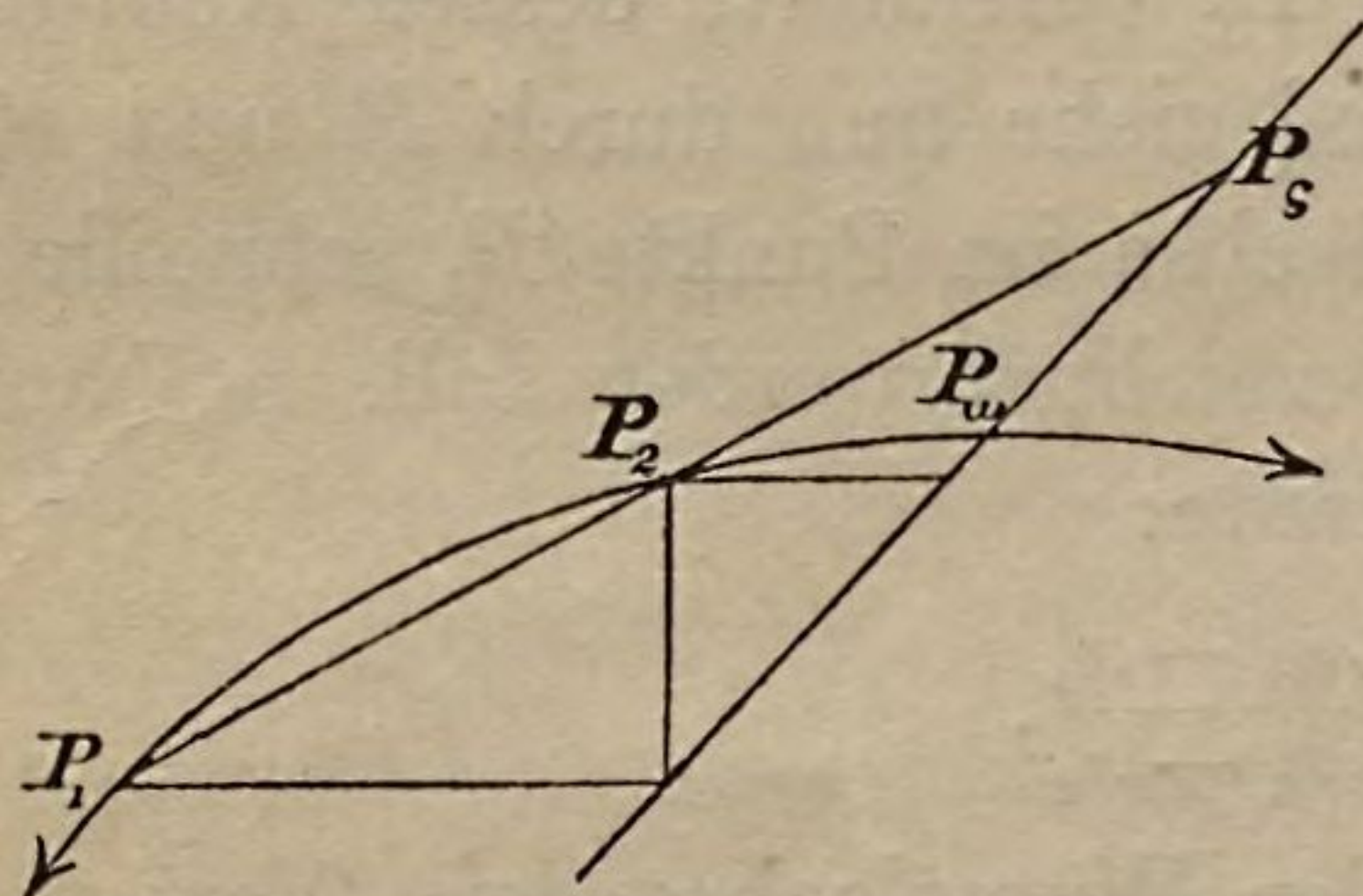
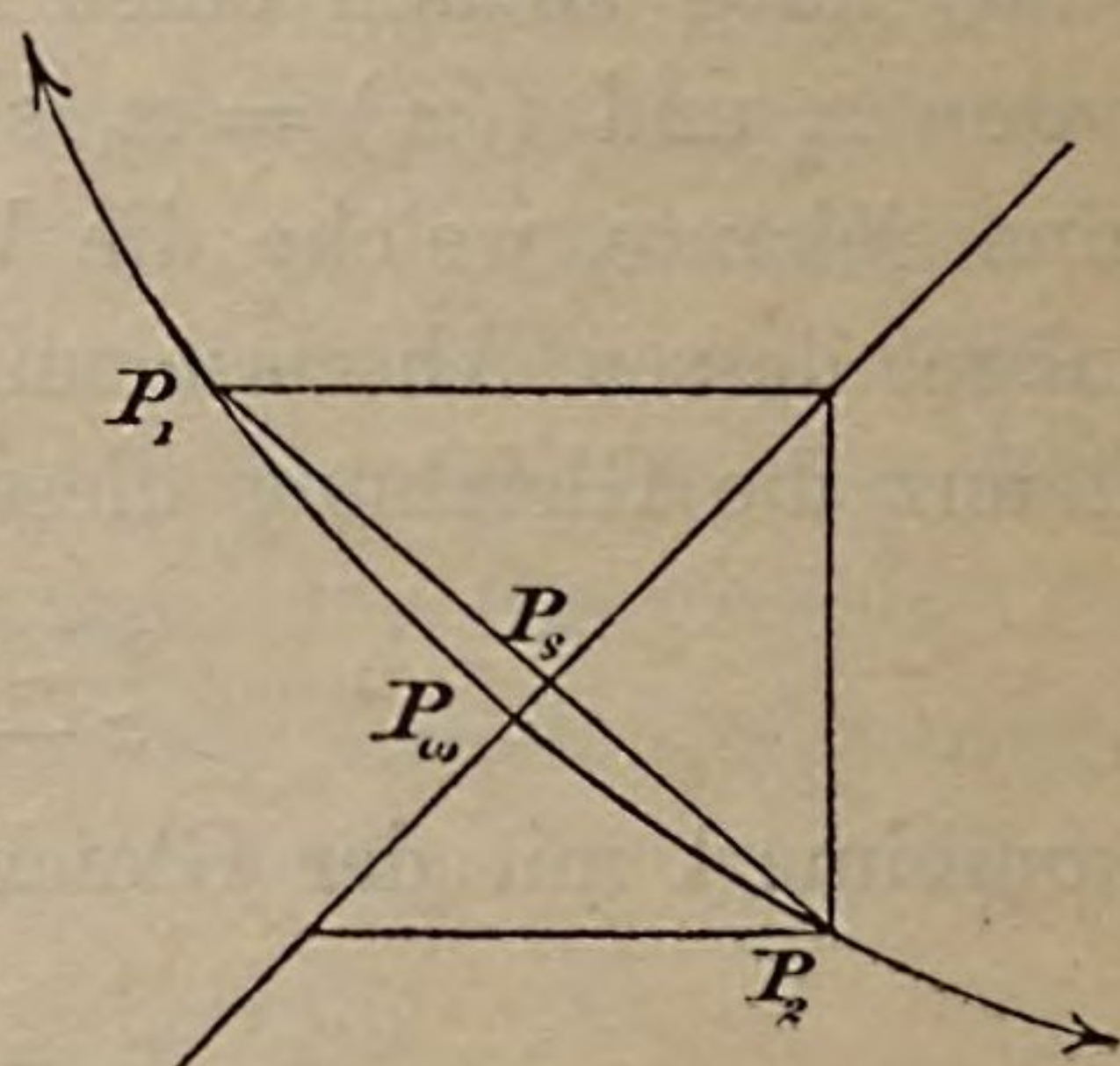


Fig. 61.



Näherungswert (Fig. 60 und 61) und bietet dadurch den Vorteil, dafs die gesuchte Wurzel zwischen zwei Grenzen eingeschlossen erscheint.

Noch andere Erwägungen liefsen sich hier anknüpfen, doch lasse ich sie weg, um zu einem wichtigeren Gegenstande überzugehen.

§ 51. P_1 sei ein Punkt der Kurve $y = f(x)$, und seine Koordinaten x_1 und $f(x_1)$ seien bekannt. Wir ziehen durch P_1

eine Tangente, welche die Wurzelachse in P_t schneiden möge. Welche Abscisse hat dieser Punkt P_t ?

Aus der Gleichung der Tangente:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1),$$

kombiniert mit der der Wurzelachse, ergibt sich leicht:

$$x_t = \frac{f(x_1) - x_1 f'(x_1)}{1 - f'(x_1)}.$$

Dafs durch den so bestimmten Anpassungswert x_t die erste Konvergenzgrenze beseitigt wird, ist auch hier wieder zweifellos. Auch ist von vornherein eine Beschleunigung der Konvergenz zu erwarten, und zwar eine bessere, als die im vorigen Paragraphen entwickelte, weil die Tangenten enger als die Sekanten dem Laufe der Kurve sich anschließen.

Fig. 62.

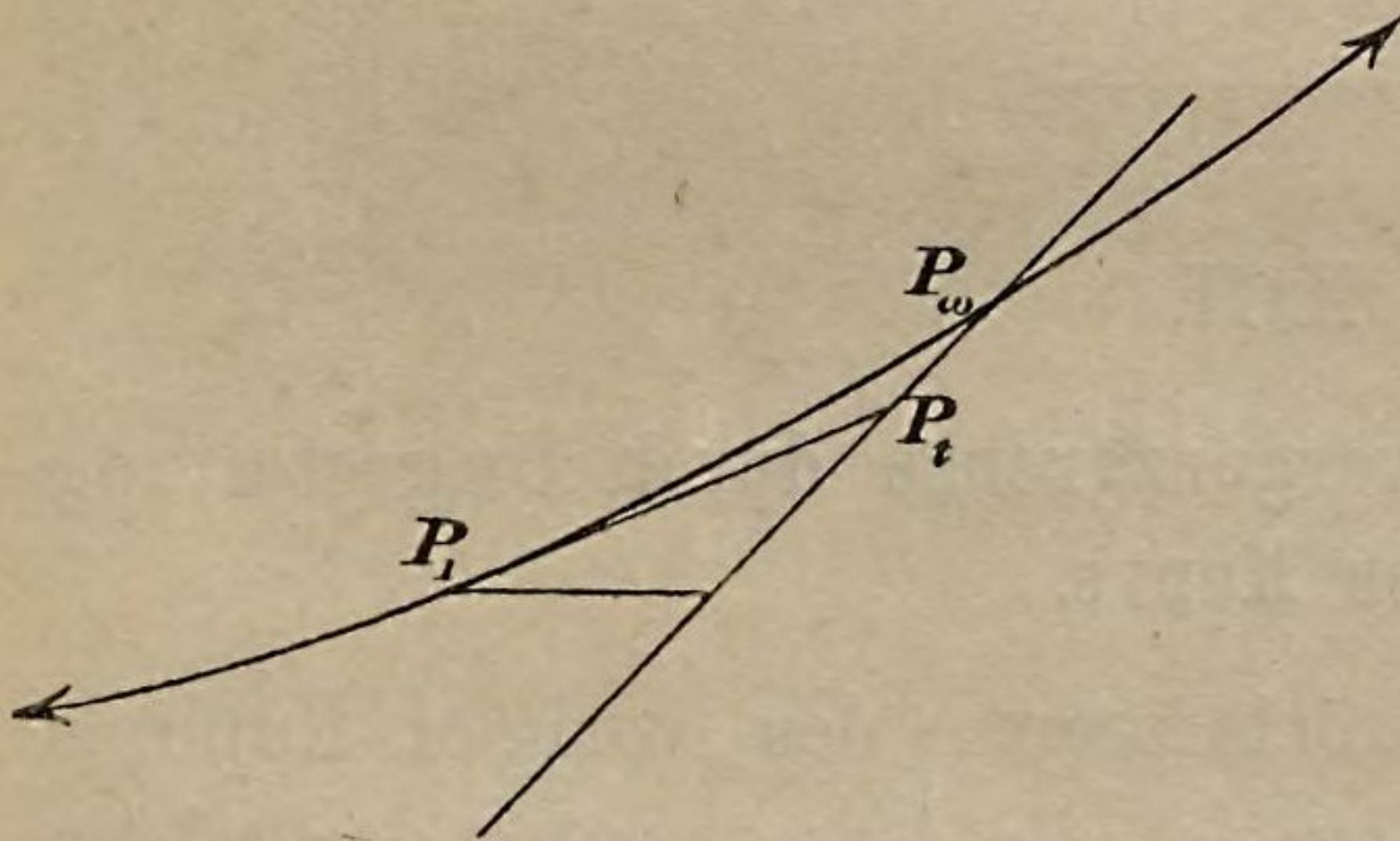


Fig. 63.

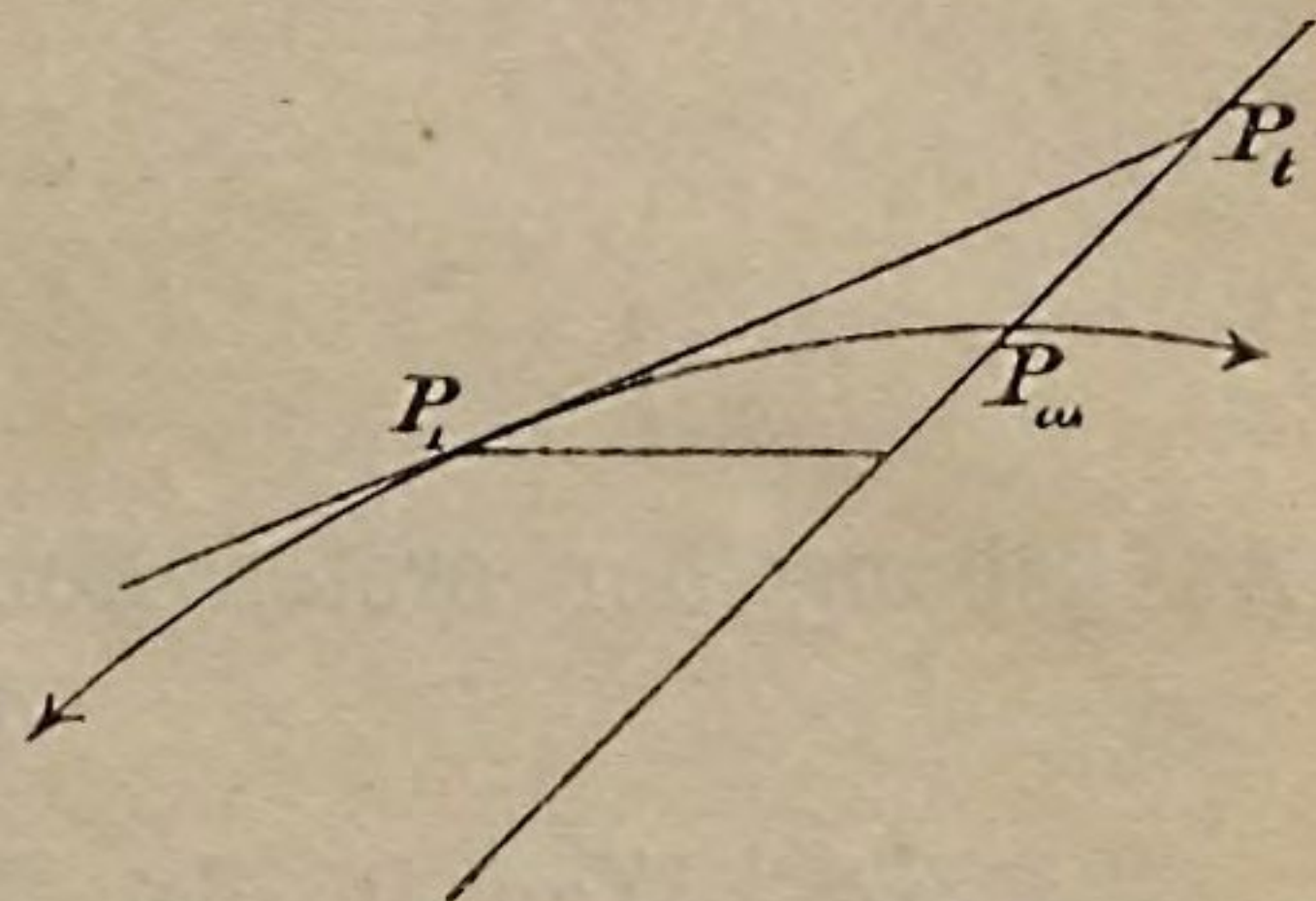


Fig. 62 und 65 lehren, dafs x_t sicher ein besserer Näherungswert als $f(x_1)$ ist, wenn $f''(x_1) > 0$, und Fig. 63 und 64 lehren, dafs x_t sicher ein jenseitiger Wert ist, wenn $f''(x_1) < 0$.

Fig. 64.

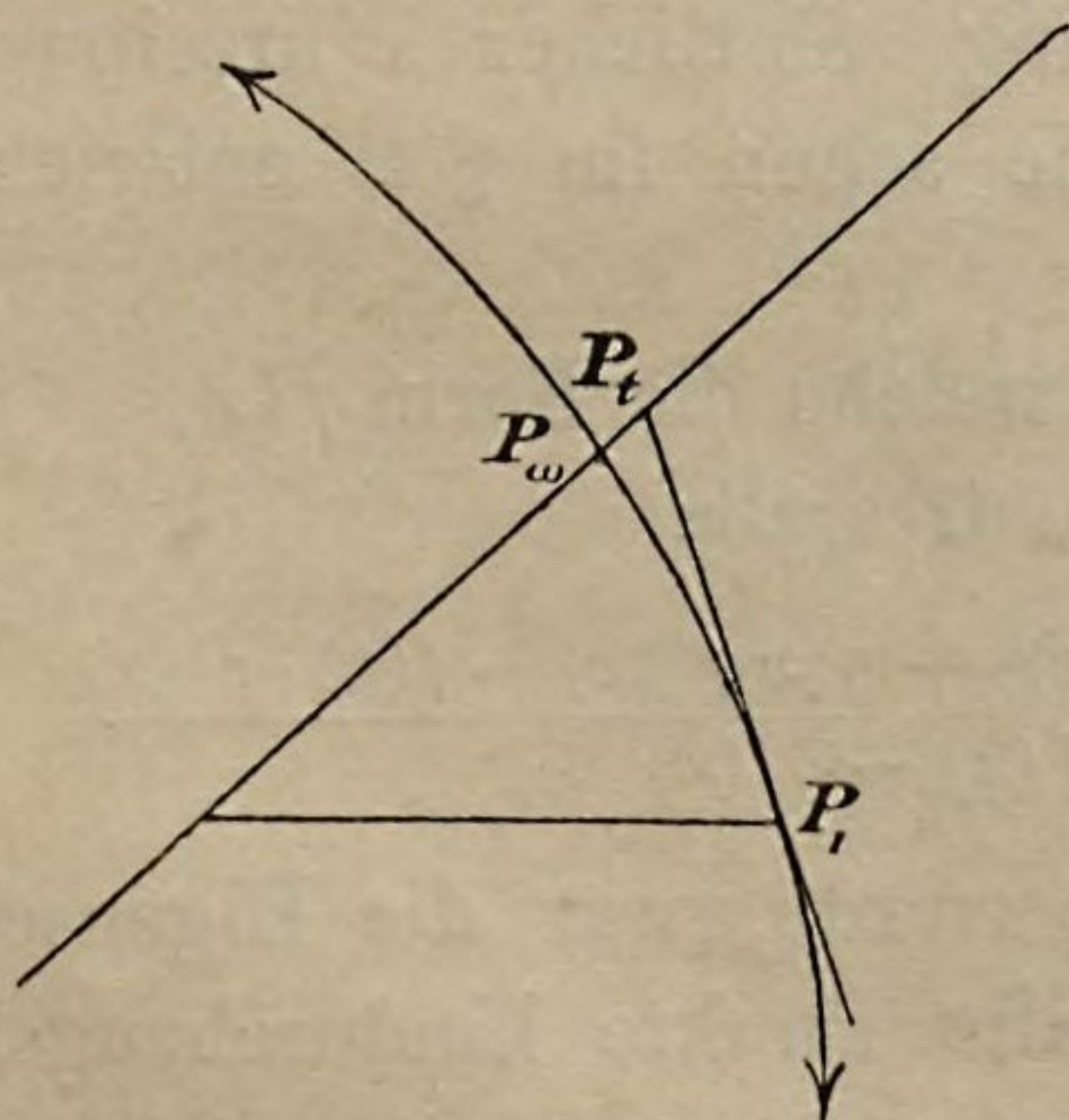
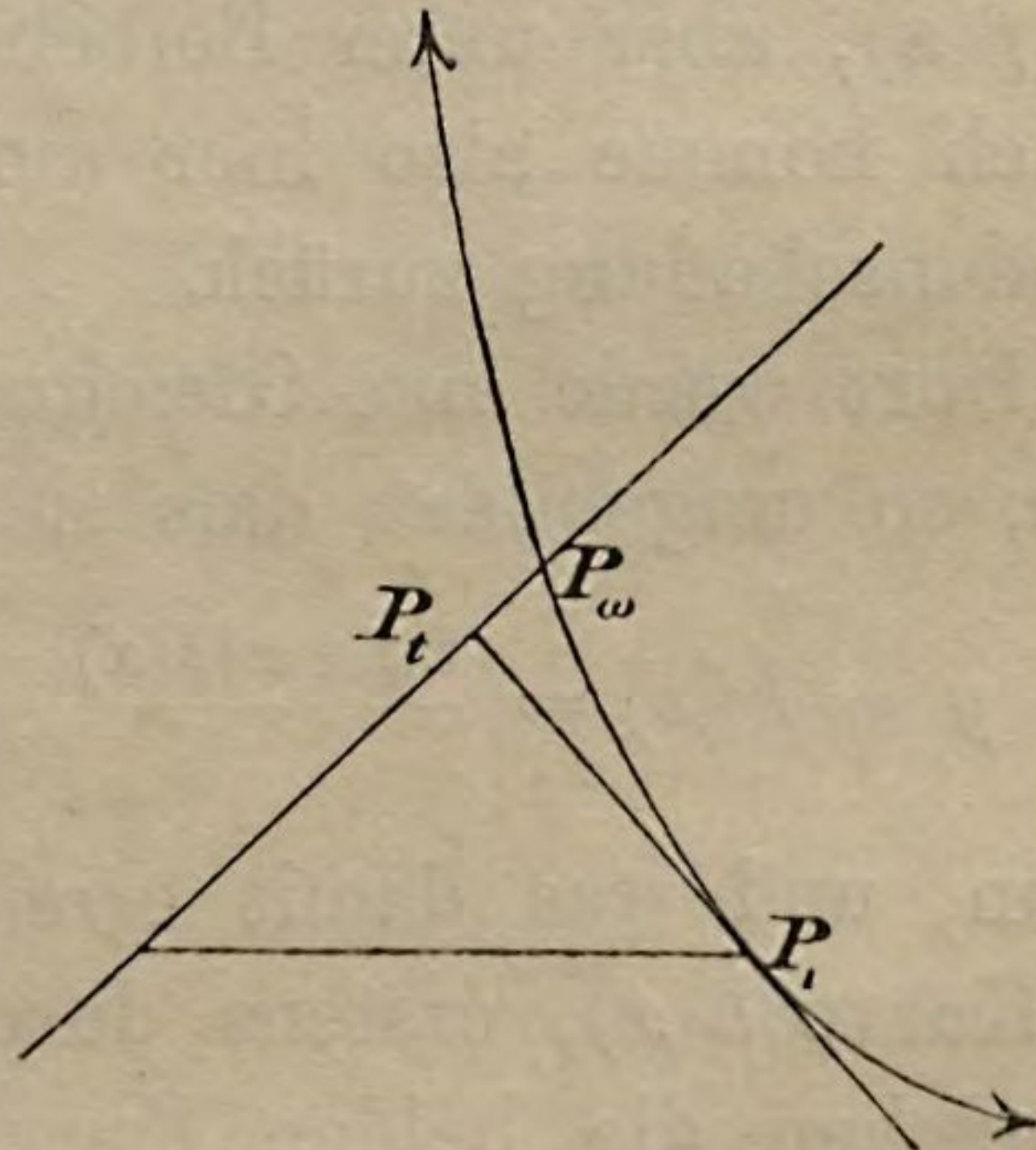


Fig. 65.



Vergleicht man Fig. 58 mit 62 und 60 mit 63, so zeigt sich, daß sowohl x_s als x_t bessere Näherungswerte als $f(x_1)$ sind, wenn $f'(x_1)$ und $f''(x_1)$ gleichzeitig positiv sind, ferner, daß sowohl x_s als x_t jenseitige Werte liefern, wenn $f'(x_1) > 0$ und $f''(x_1) < 0$ ist. Vergleicht man hingegen Fig. 59 mit 64 und 61 mit 65, so zeigt sich umgekehrt, daß x_s der jenseitige, wenn x_t der nähere ist und umgekehrt. Hierbei ist $f'(x_1) < 0$. Selbstverständlich schließt die Eigenschaft, ein jenseitiger Wert zu sein, nicht aus, daß der betreffende Wert x_s oder x_t auch eine größere Annäherung erzielt. —

Mit x_s und x_t ist die Zahl der möglichen „Anpassungen“ nicht erschöpft; man könnte außer der Sekante und Tangente z. B. noch den oskulierenden Kreis in Betracht ziehen, doch würde mich das hier zu weit führen.

XIII.

Aufhebung der ersten Konvergenzgrenze durch Umgestaltung der Kurve.

§ 52. Was in den Erörterungen des vorigen Kapitels behandelt und gedeutet worden ist als Anpassung derjenigen Näherungswerte, welche die einfache Iteration der Funktion $f(x)$ liefert, läßt sich auch unter einem anderen Gesichtspunkte auffassen, nämlich als eine Veränderung der zu iterierenden Funktion selbst. Und dies veranschaulicht sich geometrisch durch eine Drehung und Biegung der Kurve $y = f(x)$, aber unter Beibehaltung sämtlicher Wurzelpunkte. — Ich komme also hier auf die schon im § 2 entwickelte Grundanschauung zurück.

Dort wurde eine Gleichung, welche die Form $f(x) = g(x)$ hatte, so umgebildet, daß sie die Gestalt:

$$y = h(x) = \frac{\tan \alpha [f(x) - g(x)] + g(x)f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{f'(x) - g'(x)}$$

bekam, und was damit erreicht wurde, war die Eigenschaft der Kurve $h(x)$, erstens durch alle Punkte hindurchzugehen, in welchen die beiden Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sich

schneiden, und zweitens, an all diesen Punkten mit der Richtung der positiven X-Achse den Winkel α zu bilden.

Wenden wir diese Umformung auf unseren Fall an, so ist einfach $g(x) = x$ zu setzen und man erhält nach Umkehrung der Zeichen in Zähler und Nenner:

$$y = \frac{\tan \alpha [x - f(x)] + f(x) - x \cdot f'(x)}{1 - f'(x)}.$$

Zweck einer solchen Transformation kann ein Mehreres sein. Erstens nämlich kann man die Kurve, wenn sie in den centrifugalen Quadranten liegt, in die centripetalen hinein-zwingen, indem man den Winkel α kleiner als $\frac{1}{4}\pi$ macht. Zweitens kann man dafür sorgen, daß die Kurve an jedem Wurzelpunkte eine fallende Richtung bekommt, und dadurch erzielen, daß die Näherungswerte pendeln, den wahren Wert der Wurzel mithin stets in Grenzen einschließen und dadurch über den Grad der jedesmal erreichten Annäherung Gewissheit geben. Zu diesem Zweck wird man einen kleinen negativen Wert für $\tan \alpha$ einführen. Drittens kann man aber auch die Kurve horizontal durch die Wurzelachse gehen lassen wollen, weil dadurch in unmittelbarer Nähe des Wurzelpunktes die Annäherung an denselben am meisten beschleunigt wird. Dann setzt man $\tan \alpha = 0$ und erhält:

$$y = \frac{f(x) - x \cdot f'(x)}{1 - f'(x)} = \varphi(x).$$

§ 53. Vergleichen wir jetzt die so umgeformte Kurven-gleichung zuerst mit derjenigen „angepaßten Näherung“ x_t , welche im vorigen Kapitel die in P_1 konstruierte Tangente geliefert hat, so leuchtet sofort ein, daß die Sache ein und dieselbe ist.

Zweitens ist die Gleichung $y = \varphi(x)$ mit demjenigen Ergebnis zu vergleichen, welches die in § 49 entwickelte Anpassung der Näherungswerte durch den Faktor k erzielt hat. Der günstigste Wert von k war dort

$$k = \frac{f'(x)}{f'(x) - 1}.$$

Setzen wir diesen in die Formel ein, welche damals für denangepaßten Näherungswert abgeleitet worden war, so kommt:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{f'(x)}{f'(x) - 1} [f(x) - x] &= \frac{f(x)f'(x) - f(x) - f(x)f'(x) + xf'(x)}{f'(x) - 1} \\ &= \frac{f'(x) - xf'(x)}{1 - f'(x)} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Also hatte auch jene „vorteilhafteste“ Anpassung die Bedeutung, daß die Kurve $y = f(x)$ an den Wurzelpunkten gedreht wurde, bis ihre Richtung dort der X-Achse parallel geworden.

§ 54. Schließlich greifen wir noch auf die Grundgleichung des § 3 zurück, welche lautete:

$$F(x) = g(x) - f(x) = 0.$$

Setzt man hier wiederum $g(x) = x$, so ergibt sich: $F(x) = x - f(x)$, also $F'(x) = 1 - f'(x)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f(x) - xf'(x)}{1 - f'(x)} = \frac{f(x) - x + x[1 - f'(x)]}{1 - f'(x)} = x - \frac{x - f(x)}{1 - f'(x)} \\ &= x - \frac{F(x)}{F'(x)}. \end{aligned}$$

Letzteres aber ist derjenige Algorithmus, den man mit dem Namen der „Newton'schen Näherungsmethode“ zu bezeichnen pflegt. Es ist also auch dieser geometrisch zu deuten als eine Drehung der ursprünglichen Kurve an allen Wurzelpunkten bis zur horizontalen Richtung¹⁾, und diese Auffassung ist, wie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden soll, außerordentlich nutzbringend zur Erklärung alter und Auffindung neuer algebraischer Thatsachen.

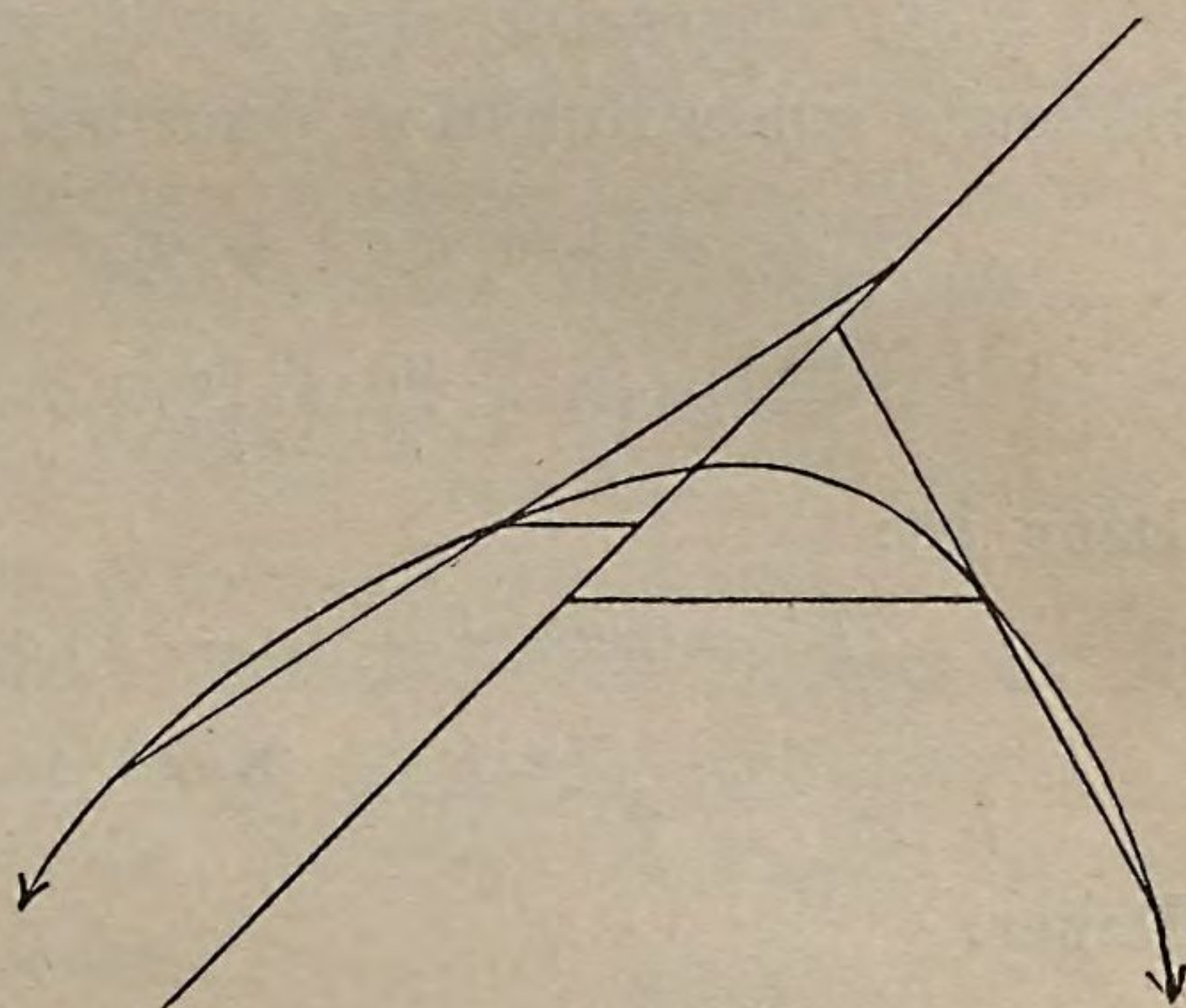
§ 55. Weil die Kurve $y = \varphi(x)$ an allen Wurzelpunkten horizontal ist, besitzt sie daselbst stets ein Maximum oder ein Minimum oder einen Beugungspunkt. Letztere Möglichkeit kann, wie später erörtert werden wird, ausgeschieden werden. In den dann übrig bleibenden Fällen ist die Annäherung stets treppenförmig, also einseitig, immer ist also auch die Frage nach jenseitigen Grenzen eine Sache von Wichtigkeit.

Diese nun können auf mancherlei Weise ermittelt werden, zunächst durch die einfache Funktion $f(x)$, wenn $f''(x_1)$ negativ ist; denn in diesem Falle liegen, wie schon in § 51 entwickelt, $f_2(x_1)$ und $x_t = \varphi(x_1)$ auf entgegengesetzten Seiten von P_ω .

1) Der Newton'sche Algorithmus erscheint hiernach als einfacher Spezialfall der Funktion $h(x)$ im § 52.

Zweitens kann man durch den Algorithmus x_s , wenn man ihn auf $f(x)$ anwendet, in vielen Fällen, wenn man ihn aber auf $\varphi(x)$ anwendet, immer einen jenseitigen Wert erzielen. Dafs dies bei einem Maximum von $\varphi(x)$ zutrifft, kann aus Fig. 60 und 66 erkannt werden; dafs es bei einem Minimum ebenfalls zutrifft, ergibt sich von selbst, wenn man Fig. 66 umdreht.

Fig. 66.



Drittens ist ein jenseitiger Wert auch durch den Algorithmus x_t , angewandt auf die Funktion φ , zu erzielen. Man sieht dies, wenn in Fig. 66 statt der Sekanten Tangenten gezogen werden. — Sowie nun aber die Anwendung des Algorithmus x_t auf die einfache Funktion $f(x)$ den Ausdruck:

$$\frac{f(x) - xf'(x)}{1 - f'(x)} = \varphi(x) = \varphi_{(1)}(x)$$

ergab, so führt die Anwendung desselben Verfahrens auf die Funktion $\varphi(x)$ zu dem Ausdruck:

$$\frac{\varphi(x) - x\varphi'(x)}{1 - \varphi'(x)} = \varphi_{(2)}(x).$$

Hierdurch wird ein jenseitiger Wert und eine beschleunigte Annäherung erhalten. Selbstverständlich steht nichts im Wege, auch noch kompliziertere Funktionen $\varphi_{(3)}(x)$, $\varphi_{(4)}(x)$ etc. zu bilden.

Bei Netto finde ich (S. 311) einen Algorithmus:

$$F(z) = z - \frac{f(z) \cdot f'(z)}{f'(z)^2 - f(z) \cdot f''(z)},$$

von welchem eine „quadratische Konvergenz“ ausgesagt wird. Dieser Algorithmus ist nichts anderes als die Funktion $\varphi_{(2)}$, nur in äußerlich verschiedener Form. Noch eine dritte äußerlich verschiedene Form für ganz denselben Algorithmus würde $x - \frac{x - \varphi}{1 - \varphi'}$ sein.

XIV.

Über die Kurve $y = x - \frac{F}{F'} = \varphi$ und deren Verwendbarkeit zur Zurückführung einer Gleichung beliebigen Grades auf Gleichungen von niedrigerem Grade.

§ 56. Es sei x eine reelle variable Gröfse und F eine rationale ganze Funktion derselben, so dafs man setzen kann:

$$\begin{aligned} F &= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ &= x^n \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right). \end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} F' &= n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \\ &= x^{n-1} \left(n + \frac{(n-1) a_1}{x} + \frac{(n-2) a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Daher:

$$y = \varphi = x - \frac{F}{F'} = x - x \frac{1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{n + \frac{(n-1) a_1}{x} + \frac{(n-2) a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}}.$$

Also:

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{n + \frac{(n-1) a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}}.$$

Wächst nun x ins positiv oder negativ Unendliche, so nähert der Bruch $\frac{y}{x}$ sich stetig der Grenze $1 - \frac{1}{n}$, und diese ist, weil n offenbar eine positive ganze Zahl bedeutet, stets ein positiver echter Bruch.

Daraus folgt, dafs im Unendlichen die Koordinaten y und x gleiche Vorzeichen haben, und dafs daselbst der absolute Betrag von y kleiner als der von x ist.

Dieses Resultat bedeutet geometrisch, dafs die Kurve $y = \varphi$, sobald der Wert von x auf der positiven bez. negativen Seite grofs genug geworden ist, sich ganz gewifs zwischen der X-Achse und der Wurzelachse befindet, dafs sie also innerhalb des ersten Oktanten ins positiv, innerhalb des fünften

Oktanten ins negativ Unendliche verläuft. Die Gerade $y = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x$ ist Asymptote.

§ 57. Wo ist die Kurve unstetig? — Unstetig kann die Kurve $y = x - \frac{F}{F'}$ nur an denjenigen Punkten werden, wo der Nenner F' verschwindet, und sie muß daselbst unstetig werden, wenn nicht gleichzeitig auch der Zähler dort verschwindet. Nehmen wir daher an, die ursprüngliche Gleichung $F = 0$ sei von allen mehrfachen Wurzeln befreit, so kann F und F' nicht gleichzeitig verschwinden, also tritt dann an allen Verschwindungspunkten von F' — d. h. bei allen Werten von x , welche reelle Wurzeln der Gleichung $F' = 0$ darstellen — eine Unstetigkeit der Kurve $y = \varphi$ auf.

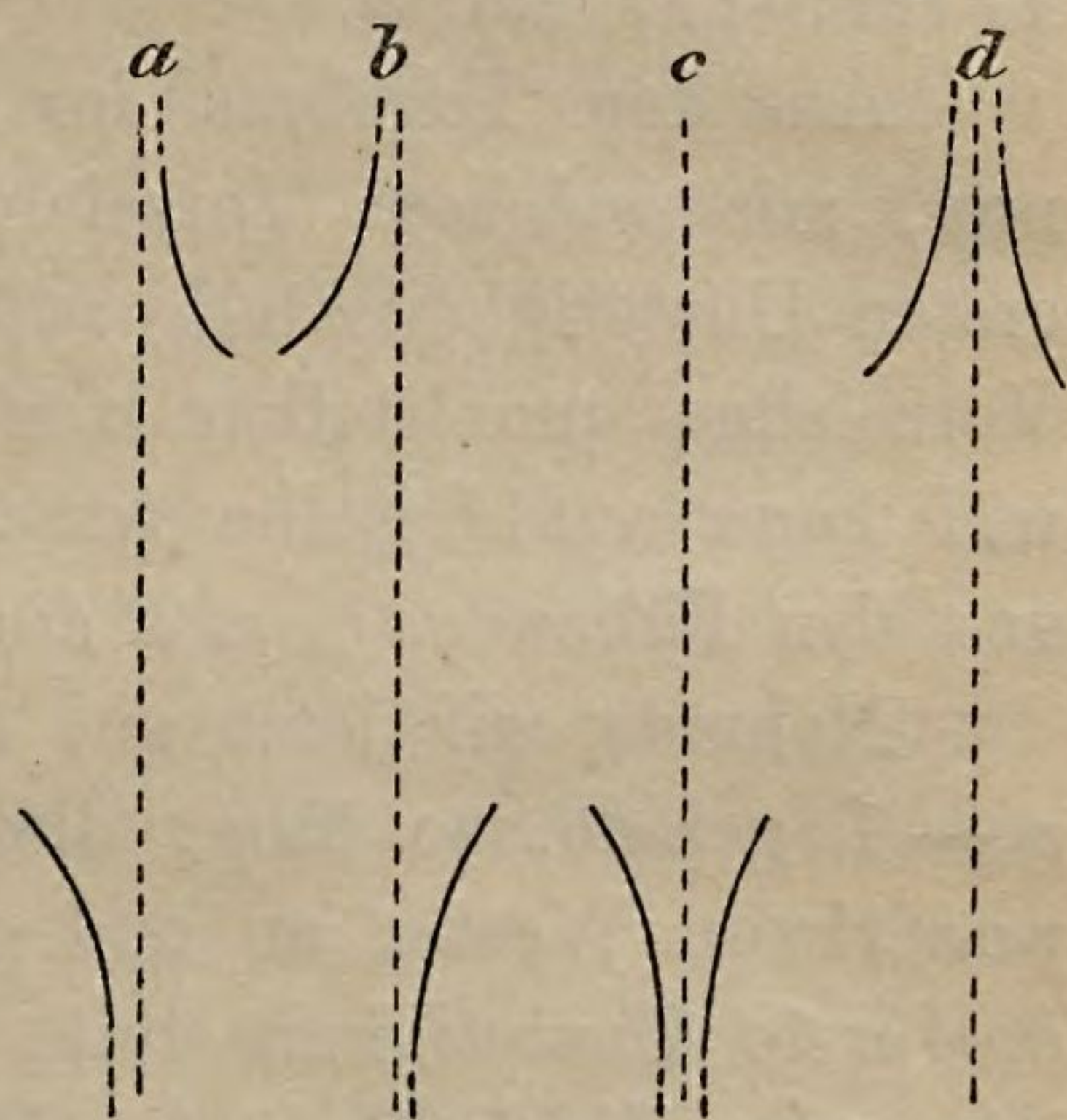
Die Kurve zerreißt hier, sie trennt sich in einzelne Stücke und ihr Verlauf an der Rißsstelle entspricht einem der vier Fälle a, b, c, d der Figur 67. Welchem von diesen sie entspricht, kann auf mehrfache Weise entschieden werden.

Die erste und nächstliegende Art besteht darin, daß man nahe vor und nahe hinter dem Unstetigkeitspunkte das Vorzeichen von φ bestimmt. Dabei zeigt des Ergebnis — + den Fall a , + — den Fall b , — — den Fall c , + + den Fall d an.

Die zweite Art ist die, daß man am Unstetigkeitspunkte selbst das Vorzeichen von F bestimmt, nebenbei den Grad n dieser Funktion und die Ein- oder Vielfachheit derjenigen Wurzel beachtet, welche durch das Verschwinden von F' die betreffende Unstetigkeit hervorgebracht hat.

Nehmen wir z. B. an, n sei eine gerade Zahl, $n - 1$ also ungerade, so beginnt die Funktion F' bei $x = -\infty$ mit negativen Werten und steigt mit wachsendem x so lange, bis sie am ersten Unstetigkeitspunkte der Kurve den Wert Null erreicht hat. Die dort vorhandene Wurzel der Gleichung

Fig. 67.



$F' = 0$ kann nun eine 1, 3, 5 etc.-fache, oder eine 2, 4, 6 etc.-fache sein. Im ersten Falle geht F' durch die Null hindurch, kehrt sein Zeichen um und bewirkt, daß auch $\varphi = x - \frac{F}{F'}$ sein Zeichen umkehrt. Also liegt der Fall a oder b vor. Ist nun an diesem selben Punkte die Funktion F negativ, so ist sie unmittelbar vor und nachher auch negativ, da sie ja nicht gleichzeitig mit F' zu Null wird. Folglich ist der Quotient $\frac{F}{F'}$ vor der Unstetigkeitsstelle positiv, nachher negativ. Dann haben wir den Fall a . Ist hingegen F an der Unstetigkeitsstelle positiv, so kommt der Fall b heraus.

Nun konnte die betreffende Wurzel von $F' = 0$ auch eine 2, 4, 6 etc.-fache sein. Dann kehrt F' an der Unstetigkeitsstelle sein Zeichen nicht um. Für ein negatives F ist also der Quotient $\frac{F}{F'}$ vor und nachher positiv, demnach φ negativ, also liegt der Fall c vor. Entsprechend kennzeichnet das positive F dann den Fall d .

Aus dem Ergebnis der vorstehenden Prüfung weiß man nun, mit welchem Vorzeichen die Funktion F' hinter der ersten Unstetigkeitsstelle anfängt. Daher kennt man auch ihr Vorzeichen unmittelbar vor der zweiten Unstetigkeitsstelle und kann auf dieselbe Art wie vorhin entscheiden, welcher von den Fällen a, b, c, d dort vorliegt u. s. w. —

Nehmen wir jetzt an, n sei eine ungerade Zahl, also $n - 1$ gerade, so fängt die Funktion F' bei $x = -\infty$ mit positiven Werten an und gelangt mit einem solchen bis an die erste Unstetigkeitsstelle. Hier läßt sich jetzt durch die Ein- oder Vielfachheit der Wurzel und durch das Vorzeichen von F die gewünschte Entscheidung treffen. Und so fort. —

Die dritte Methode wird in der Regel die einfachste sein. Aus

$$\varphi = x - \frac{F}{F'} \text{ folgt } \varphi' = \frac{F F''}{(F')^2}.$$

Also stellen die Vorzeichen von F und F'' an jedem Unstetigkeitspunkte das Vorzeichen von φ' fest. Je nachdem dasselbe negativ oder positiv ist, hat die Kurve eine fallende (a) oder eine steigende (b) Richtung. Sollte aber die Funktion

F'' eben an diesem Punkte verschwinden, so würde eine mehrfache Wurzel der Gleichung $F' = 0$ vorhanden sein. Man braucht dann bloß den Wert von F'' kurz vor oder nach der Unstetigkeitsstelle zu bestimmen, um zwischen den dann vorliegenden Fällen c und d entscheiden zu können.

§ 58. Nun die Frage, wie die Kurve sich an den Verschwindungsstellen von F und F'' verhält. — Aus der Definition von φ folgt, daß überall, wo F verschwindet, $y = x$ ist. Also schneidet die Kurve an diesen Punkten die Wurzelachse. Umgekehrt ist einleuchtend, daß y nur dann gleich x werden kann, wenn F verschwindet, denn der Fall, daß der Nenner $F' = \infty$ werden und dadurch $y = x$ machen könnte, kommt nach § 56 nicht in Betracht.

Sodann ist aus der vorhin für φ' abgeleiteten Bestimmung zu ersehen, daß φ' nur verschwinden kann durch Verschwinden von F oder F'' . Verschwindet F , so muß φ' verschwinden, weil die Gleichung $F = 0$ nach der Annahme von allen mehrfachen Wurzeln befreit ist, also mit F niemals zugleich auch F' verschwinden kann. — Verschwindet F'' , so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Denn die Verschwindungspunkte von F'' können entweder an den Unstetigkeitsstellen liegen — nämlich dann, wenn letztere einer mehrfachen Wurzel von $F' = 0$ entsprechen — oder sie können auf dem Wurzelzweige selbst, also im Endlichen liegen, und im letzteren Falle verschwindet mit F'' nicht auch F' . Eben darum aber verschwindet daselbst φ' .

Demnach haben wir den Satz: An allen im Endlichen liegenden Punkten, wo entweder F oder F'' oder beide verschwinden, und an keinem sonstigen Punkte ist die Kurve der X -Achse parallel.

Wir berechnen jetzt φ'' und erhalten:

$$\varphi'' = \frac{(F')^2 F'' + F F' F''' - 2 F (F'')^2}{(F')^3}.$$

An den Verschwindungspunkten von F hat φ'' den Wert $\frac{F''}{F'}$. Weil dieser nur gleichzeitig mit F'' zu Null werden kann, so folgt: Die Kurve hat bei allen reellen Wurzeln der Gleichung $F = 0$ ein Maximum oder ein Minimum,

je nachdem daselbst die Werte der Funktionen F' und F'' ungleiche oder gleiche Zeichen besitzen; sie hat einen Beugungspunkt nur dann, wenn die betreffende Wurzel gleichzeitig eine 1-, 3-, 5- etc.-fache Wurzel der Gleichung $F'' = 0$ ist.

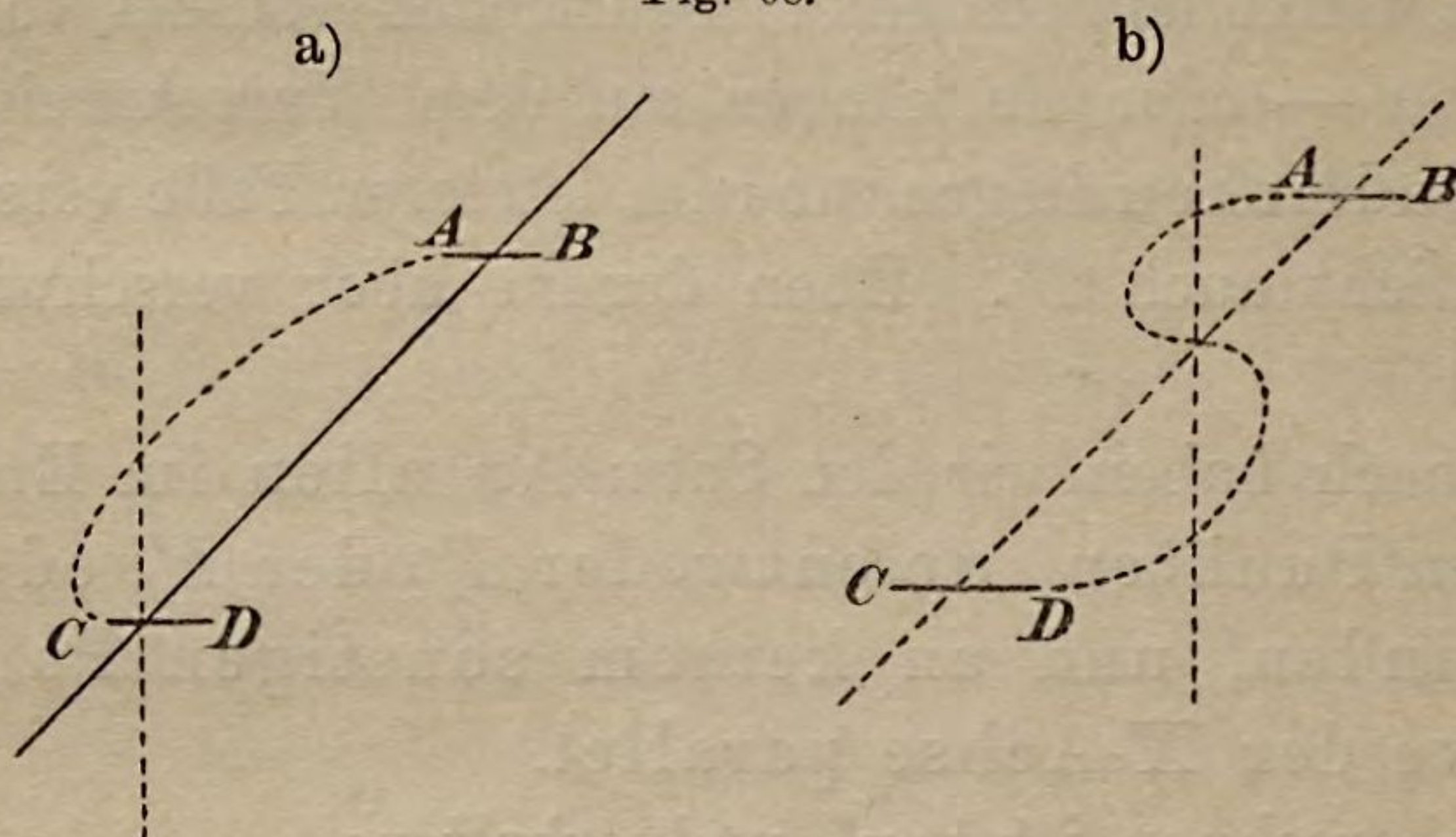
An den Verschwindungspunkten von F'' ergibt sich:

$$\varphi'' = \frac{FF'''}{(F')^2}.$$

Daraus folgt: Die Kurve hat bei allen im Endlichen liegenden Wurzelpunkten der Gleichung $F'' = 0$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem daselbst die Werte der Funktion F und F''' ungleiche oder gleiche Zeichen besitzen. Einen Beugungspunkt hat sie nur dann, wenn die betreffende Wurzel eine 2-, 4-, 6- etc.-fache, oder wenn sie gleichzeitig eine Wurzel der Gleichung $F = 0$ ist.

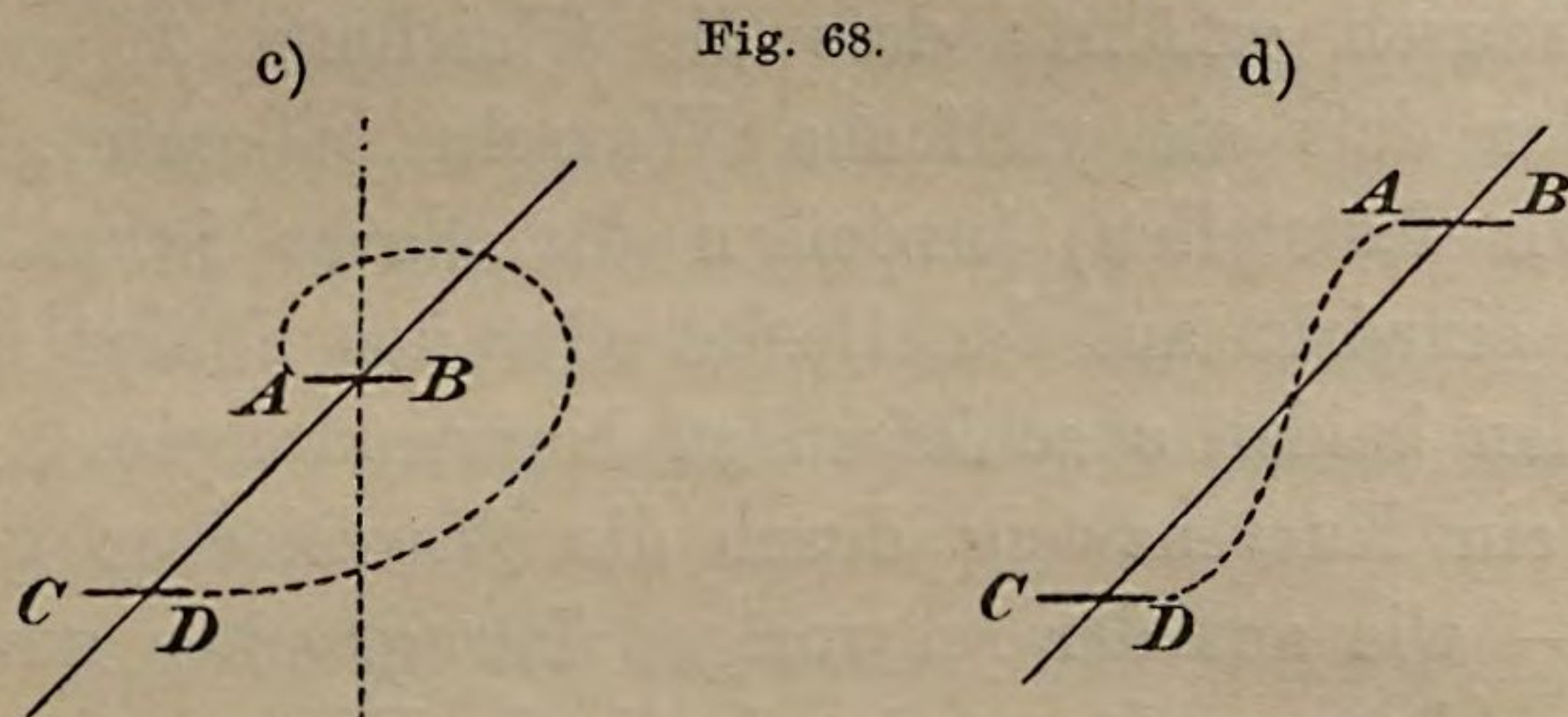
§ 59. Es seien in Fig. 68 AB und CD zwei Kurvenstücke, welche die Wurzelachse schneiden; die Schnitte geschehen also horizontal. — Denken wir uns irgend einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Stücken hergestellt, etwa dadurch, daß man

Fig. 68.



a) eine Linie von A nach C zieht. Dann würde eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt von CD und der Wurzelachse parallel zur Y -Achse gezogen wird, diese Kurve mindestens zweimal schneiden, demnach könnte die betreffende Funktion nicht eindeutig sein. Das Gleiche ergibt sich, wenn man B mit D verbindet.

Verbindet man aber A mit C und läßt dabei den Durchgang durch die Wurzelachse horizontal geschehen (b und c),



so springt die Mehrdeutigkeit der Funktion sofort in die Augen. Vermeidet man die Mehrdeutigkeit (d), so geschieht der Schnitt nicht horizontal.

Überhaupt kann man sich leicht davon überzeugen, daß es unmöglich ist, zwei Teile der Kurve $y = \varphi$, welche alle beide die Wurzelachse schneiden, auf irgend eine Weise mit einander in Zusammenhang zu bringen. Daraus folgt, daß ein Kurvenzweig die Wurzelachse nur einmal schneiden kann, und hieraus der Satz: Die Zahl der reellen Wurzeln der Gleichung $F = 0$ kann nicht größer sein, als die Zahl der Zweige, welche die Kurve $y = \varphi$ hat.

Setzen wir nun zunächst den Fall, die Funktion F' habe keinen Verschwindungspunkt; dann enthält φ keine Unstetigkeit. Die Kurve $y = \varphi$ besteht also nur aus einem einzigen Zweige. Sie muß durch die Wurzelachse gehen, weil sie nach § 56 aus dem fünften in den ersten Oktanten hinüberläuft, kann die Wurzelachse nach dem eben Gesagten aber nur einmal schneiden, folglich hat in diesem Falle F einen und nur einen Verschwindungspunkt.

Angenommen zweitens, F' werde einmal gleich Null. Dann muß die Kurve zwei Zweige, also kann F zwei Verschwindungspunkte haben, und so ferner. Man ersieht sofort, daß die Zahl der reellen Wurzeln, welche die Gleichung $F = 0$ hat, höchstens um 1 größer sein kann, als die Anzahl der von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $F' = 0$.

§ 60. Diese Höchstzahl vermag aber jede einzelne Unstetigkeitsstelle herabzumindern. — Wir sehen hier ab von

jenen Verminderungen, welche die Höchstzahl n der überhaupt möglichen reellen Wurzeln einer Gleichung n ten Grades $F = 0$ dadurch erfährt, daß die Gleichung $F' = 0$ komplexe, oder daß sie vielfache Wurzeln bekommt; dagegen müssen wir feststellen, inwiefern die Natur jeder Unstetigkeitsstelle einwirkt auf den Besitz oder das Fehlen der Wurzeln bei den beiden anschließenden Kurvenzweigen.

Soll ein Kurvenzweig durch die Wurzelachse gehen, so muß er — wie aus der im vorigen Paragraphen gewonnenen Anschauung hervorgeht — oberhalb der Wurzelachse aus dem Unendlichen herkommen und mit wachsendem x unterhalb der Wurzelachse ins Unendliche verlaufen. Eine andere Möglichkeit besteht nicht. Daher reichen die vier Fälle in Fig. 67 hin, um über jeden Wurzelzweig ins Klare zu kommen.

Der Fall a) erlaubt beiden anschließenden Zweigen eine Wurzel; der Fall b) benimmt beiden die Möglichkeit. Der Fall c) erlaubt sie dem vorangehenden Zweige und benimmt sie dem nachfolgenden; der Fall d) macht es umgekehrt. Ein Zweifel bleibt nirgendwo übrig.

Da nun auch, wie man bei näherer Betrachtung leicht erkennt, von den genannten Hindernissen niemals zwei auf einen und denselben Kurvenzweig einwirken können, so gehen offenbar von der oben erwähnten Höchstzahl $2p + q + r$ reelle Wurzeln ab, wenn die Fälle b, c, d, oder, was dasselbe besagt, wenn an den Unstetigkeitsstellen die Zeichenfolgen $+-$, $--$, $++$ bezüglich p, q, r mal vorhanden sind.

§ 61. An diesen Satz läßt sich leicht noch ein weiterer anfügen. — Wie vorhin bemerkt, muß zwischen zwei reellen Wurzeln der Gleichung $F = 0$ stets die Kurve zerrissen sein. Liegt nun an der dort befindlichen Unstetigkeitsstelle der Fall b) vor, so werden die beiden anschließenden Zweige ihrer Wurzeln beraubt. Offenbar schieben sich dann zwischen die vorausgesetzten reellen Wurzeln zu der einen schon vorhandenen Unstetigkeitsstelle noch zwei neue ein, nämlich eine davor und eine dahinter. Dann haben wir zwischen den reellen Wurzeln drei Unstetigkeitsstellen. — Wenn nun aber eine angrenzende vierte Unstetigkeitsstelle wiederum den Fall b) aufweist, so beraubt diese nochmals zwei Zweige

ihrer Wurzel, also kann dann auch erst nach der fünften Unstetigkeit wieder eine reelle Wurzel kommen u. s. w. Daher ist die Anzahl der Verschwindungspunkte von F' , welche zwischen zwei reellen Wurzeln der Gleichung $F = 0$ liegen, immer eine ungerade.

Hier haben wir die Form, in welcher der von Rolle herrührende Satz ausgesprochen zu werden pflegt. Vgl. Serret I S. 223. Netto S. 208.

Indessen ist hier der Einwand, daß in obiger Ableitung des Satzes die Fälle c) und d) außer Acht geblieben seien, noch zu beseitigen. Berücksichtigen wir diese, so folgt, daß allerdings zwischen den beiden erwähnten aufeinanderfolgenden Wurzeln auch 2, 4, 6 etc. Verschwindungspunkte von F' liegen können. Allein in den Fällen c) und d) handelt es sich stets um 2, 4, 6 etc.-fache Wurzeln der Gleichung $F' = 0$. Denkt man sich eine solche n -fache Wurzel durch n einfache ersetzt, so kommt immer wieder eine ungerade Zahl heraus.

§ 62. Auf die Verschwindungspunkte von F'' , die schon in § 58 besprochen worden sind, muß ich jetzt noch einmal zurückgreifen, um einzelne derselben als Merkpunkte besonders zu kennzeichnen.

Die Auffindung der Verschwindungspunkte von F'' erfordert im allgemeinen die Lösung einer Gleichung, deren Grad um 2 niedriger als der Grad der gegebenen Gleichung ist. Wir denken uns noch aus derselben alle etwa vorhandenen 2, 4, 6 etc.-fachen Wurzeln herausgeschafft und erniedrigen dadurch ihren Grad vielleicht noch um weitere Einheiten.

Bei jedem dann noch übrig gebliebenen Verschwindungspunkte ist nun nach § 58 zu ermitteln, ob er ein Maximum, ein Minimum oder einen Beugungspunkt darstellt. Letzteres kann nur dann noch der Fall sein, wenn grade an demselben Orte auch F verschwindet. Hat man ein solches Zusammenreffen entdeckt, so ist für den betreffenden Kurvenzweig der ganze Zweck der Untersuchung schon erreicht, die auf ihm liegende Wurzel der Gleichung $F = 0$ ist gefunden, und der Zweig scheidet damit aus der Betrachtung aus.

Solcherlei Verschwindungspunkte von F'' müssen als „Merkpunkte“ angesehen, sollen aber, weil sie das Problem

mit einem Schlage lösen, Vorzugsmerkmale genannt werden. — Alle übrigen Verschwindungspunkte von F'' können nunmehr bloß noch Maxima oder Minima sein. Dasselbe gilt von den Verschwindungspunkten von F . —

Wir beginnen jetzt die Betrachtung der einzelnen Kurvenzweige, und zwar mit einem solchen, der an keinen Unstetigkeitspunkt angrenzt. Dieser muß nach § 56 oberhalb der Wurzelachse aus dem negativ Unendlichen kommen und unterhalb derselben ins positiv Unendliche hineinlaufen. Er trägt also eine Wurzel. — Möglich ist dieser Fall nur bei Gleichungen, deren Grad eine ungerade Zahl ist.

Zunächst untersuchen wir von den Verschwindungspunkten der Funktion F'' (deren Anzahl natürlich auch ungerade sein muß) bloß den ersten (niedrigsten) und den letzten (höchsten). Ist der erste ein Minimum, so ist er der Merkpunkt des Zweiges, und alle übrigen sind gleichgültig. (In Fig. 69 ist er mit m bezeichnet, wie auch in den folgenden Figuren der Buchstabe m diese Bedeutung hat.) Ist der letzte ein Maximum, so ist dieser der Merkpunkt des Zweiges (Fig. 70), und wiederum sind dann die übrigen gleichgültig. Beide Fälle können natürlich nicht gleichzeitig eintreten.

Fig. 69.

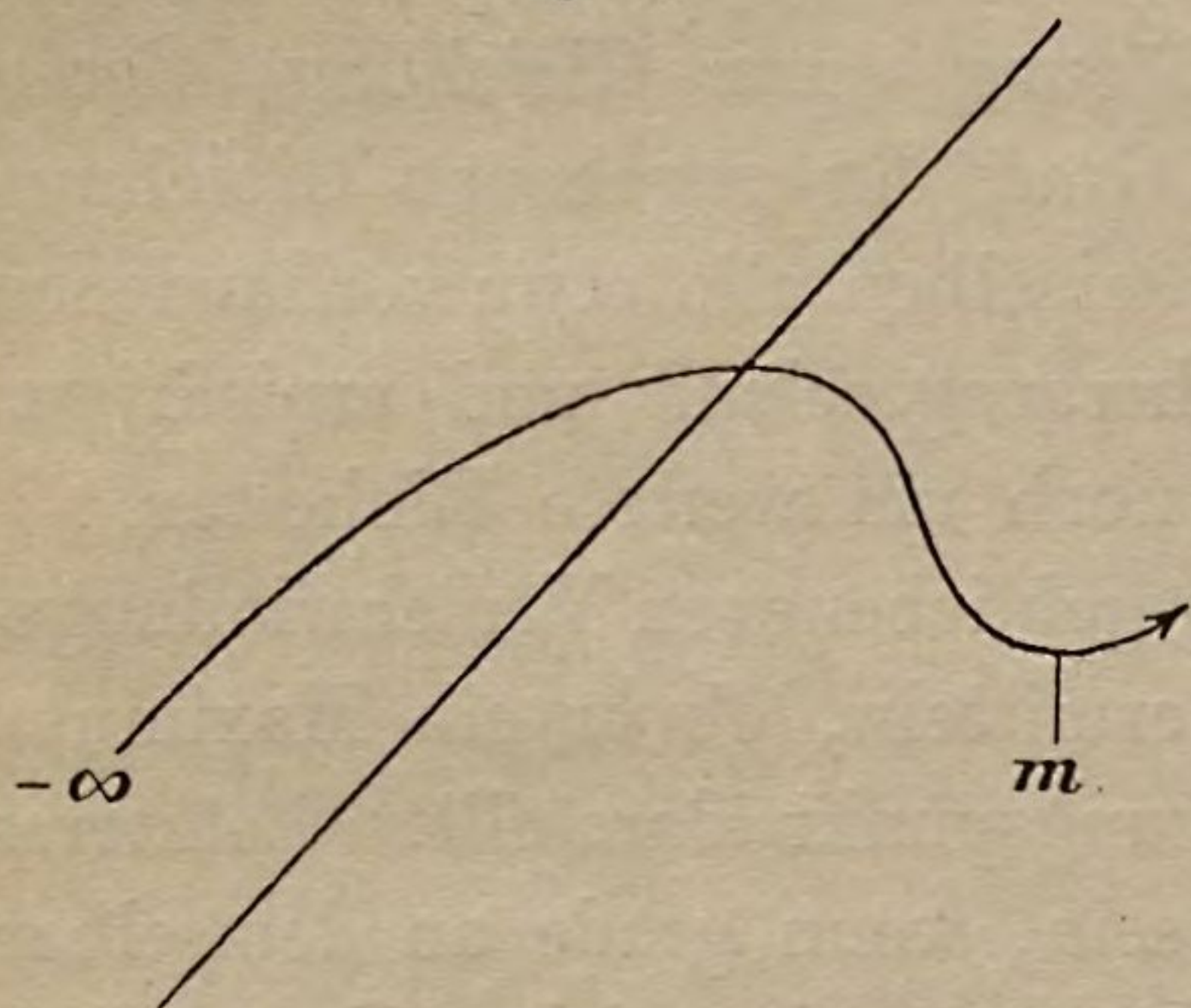
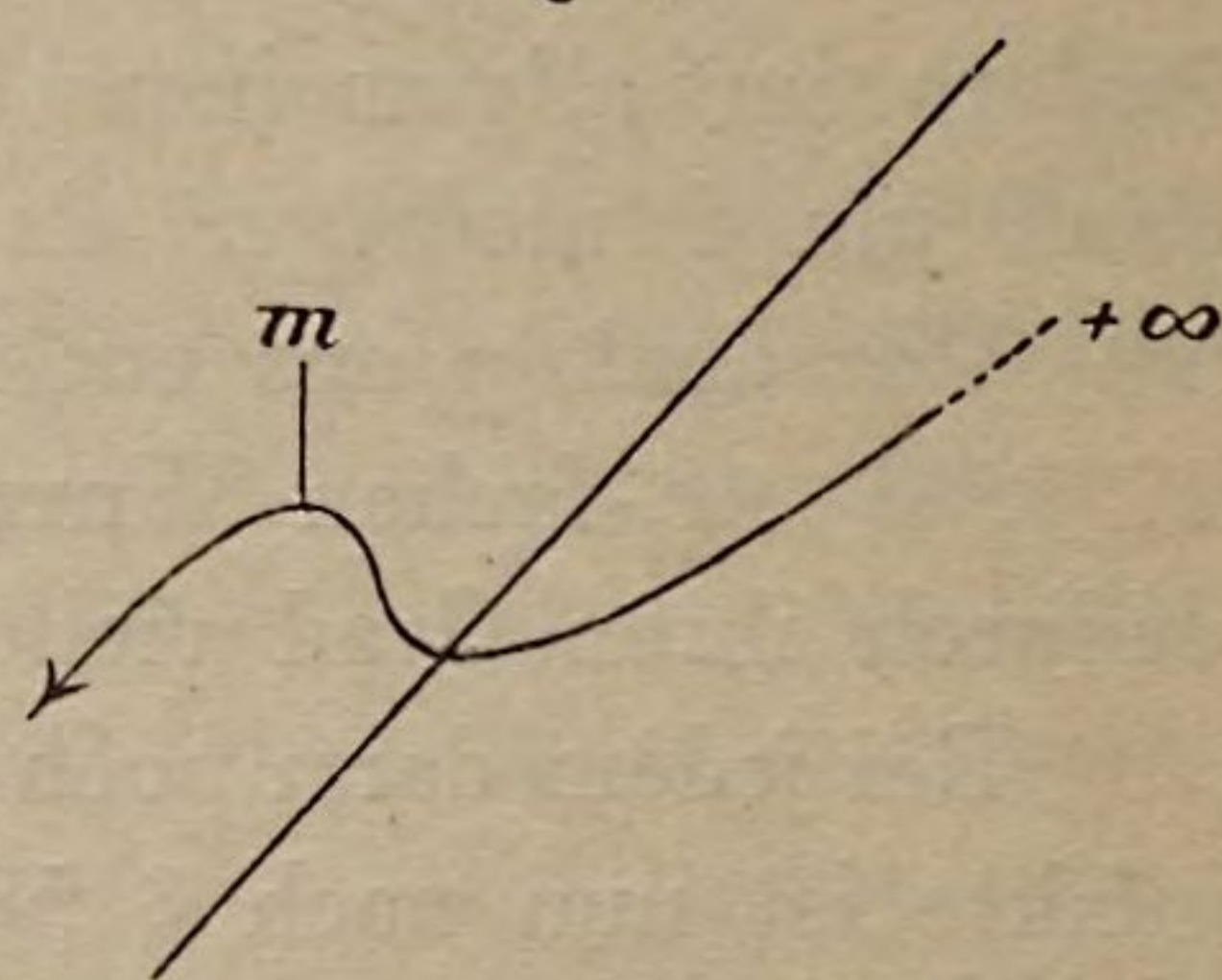


Fig. 70.



Ist aber der erste Verschwindungspunkt von F'' ein Maximum, der letzte ein Minimum, so kommen die übrigen in Betracht, und zwar handelt es sich lediglich um die Bestimmung der Stelle, wo die regelmäßige Abwechselung: Maximum, Minimum, Maximum, Minimum etc. unterbrochen ist. Irgendwo ist dies immer der Fall. — Wenn nun an

dieser Stelle zwischen zwei Maximis ein Minimum fehlt, so ist letzteres offenbar die gesuchte Wurzel; von den beiden einschließenden Maximis aber ist das algebraisch höhere (Fig. 71) der Merkpunkt des Zweiges. Fehlt hingegen zwischen zwei Minimis ein Maximum, so ist dies die gesuchte Wurzel, und von den beiden Minimis ist das niedere (Fig. 72) der Merkpunkt des Zweiges.

Fig. 71.

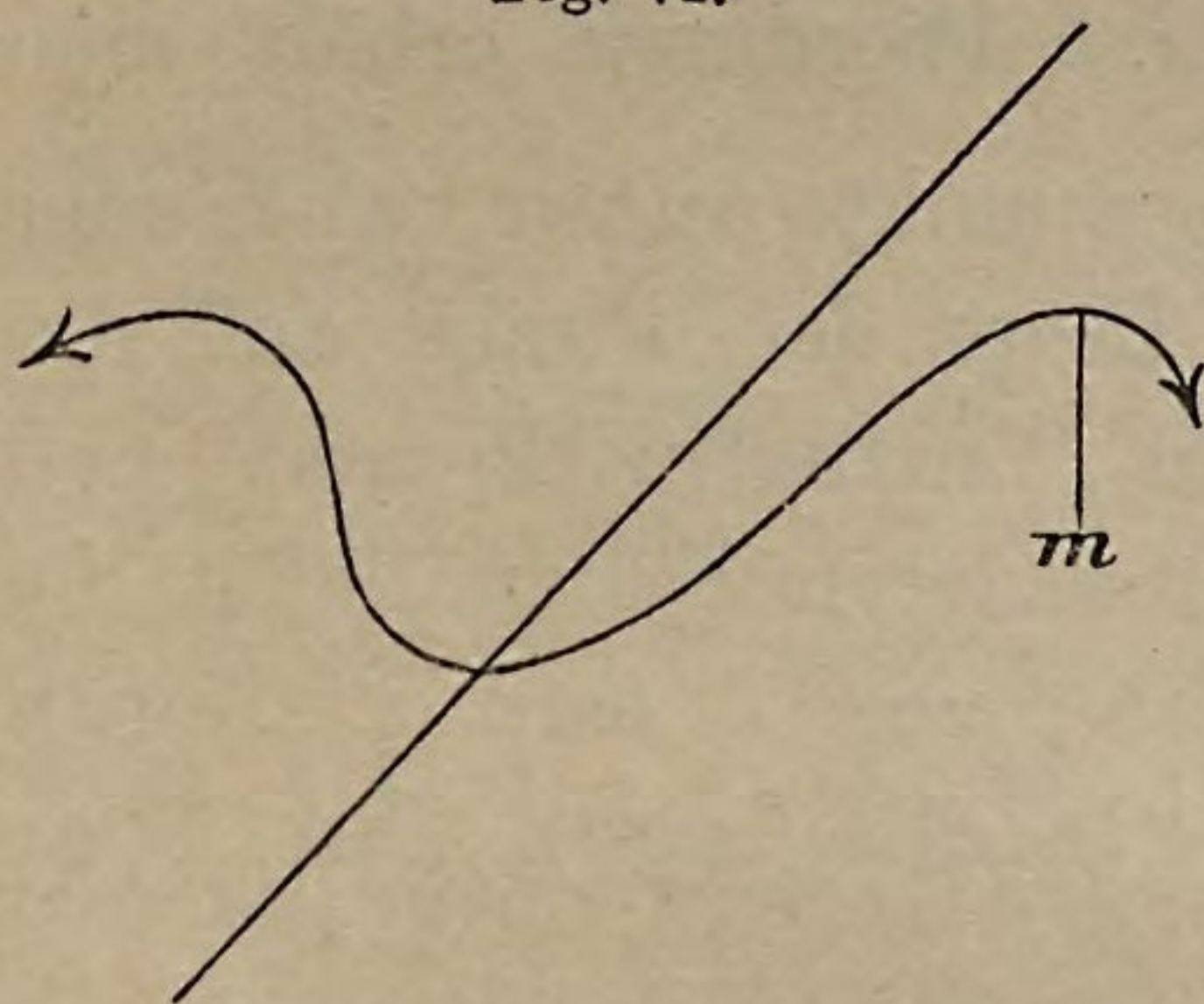
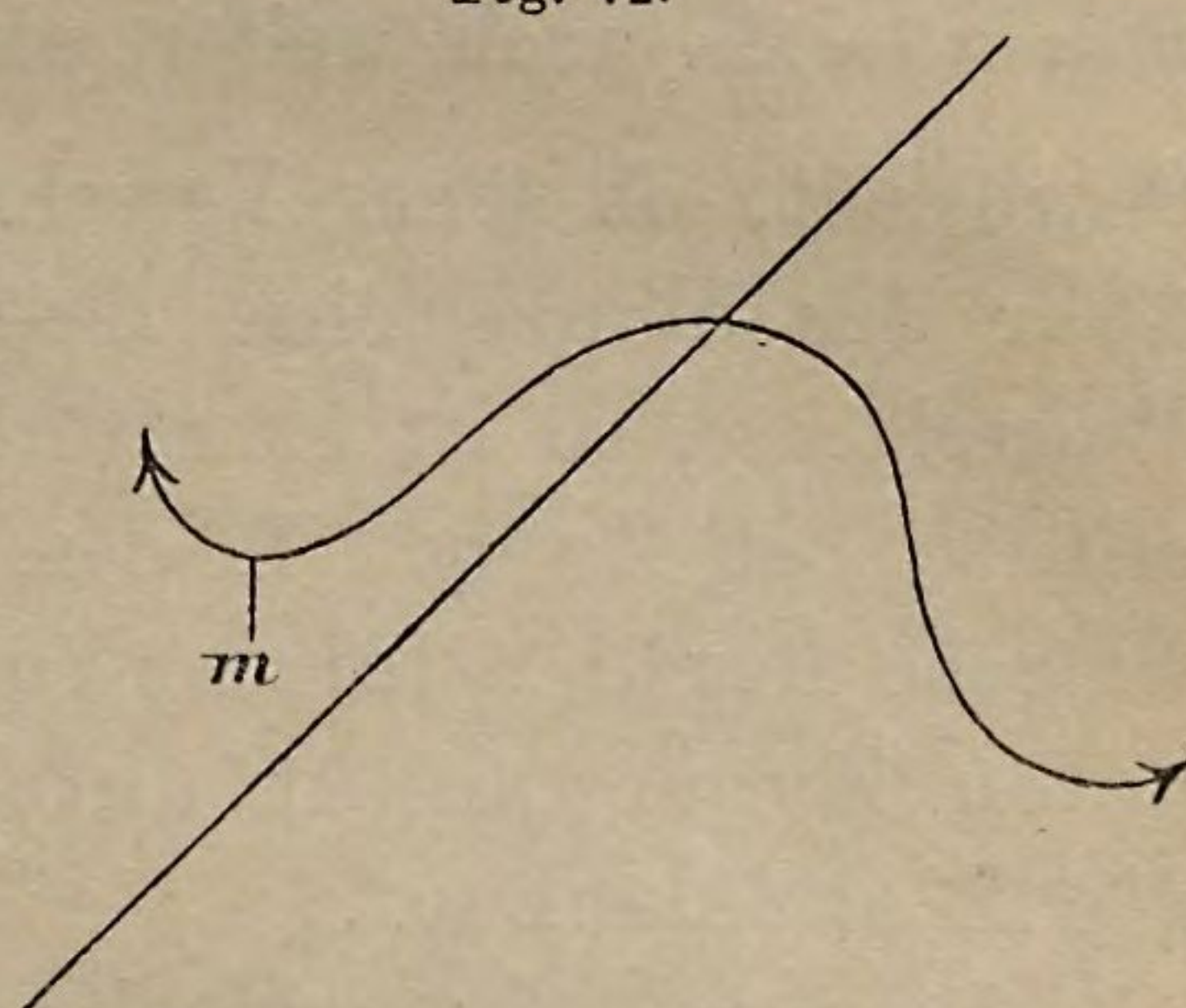


Fig. 72.



Damit ist, den „Vorzugsmerkpunkt“ mit eingeschlossen, für alle denkbaren Fälle bei dem bezeichneten Kurvenzweige ein Merkpunkt sicher gekennzeichnet. —

Fig. 73.

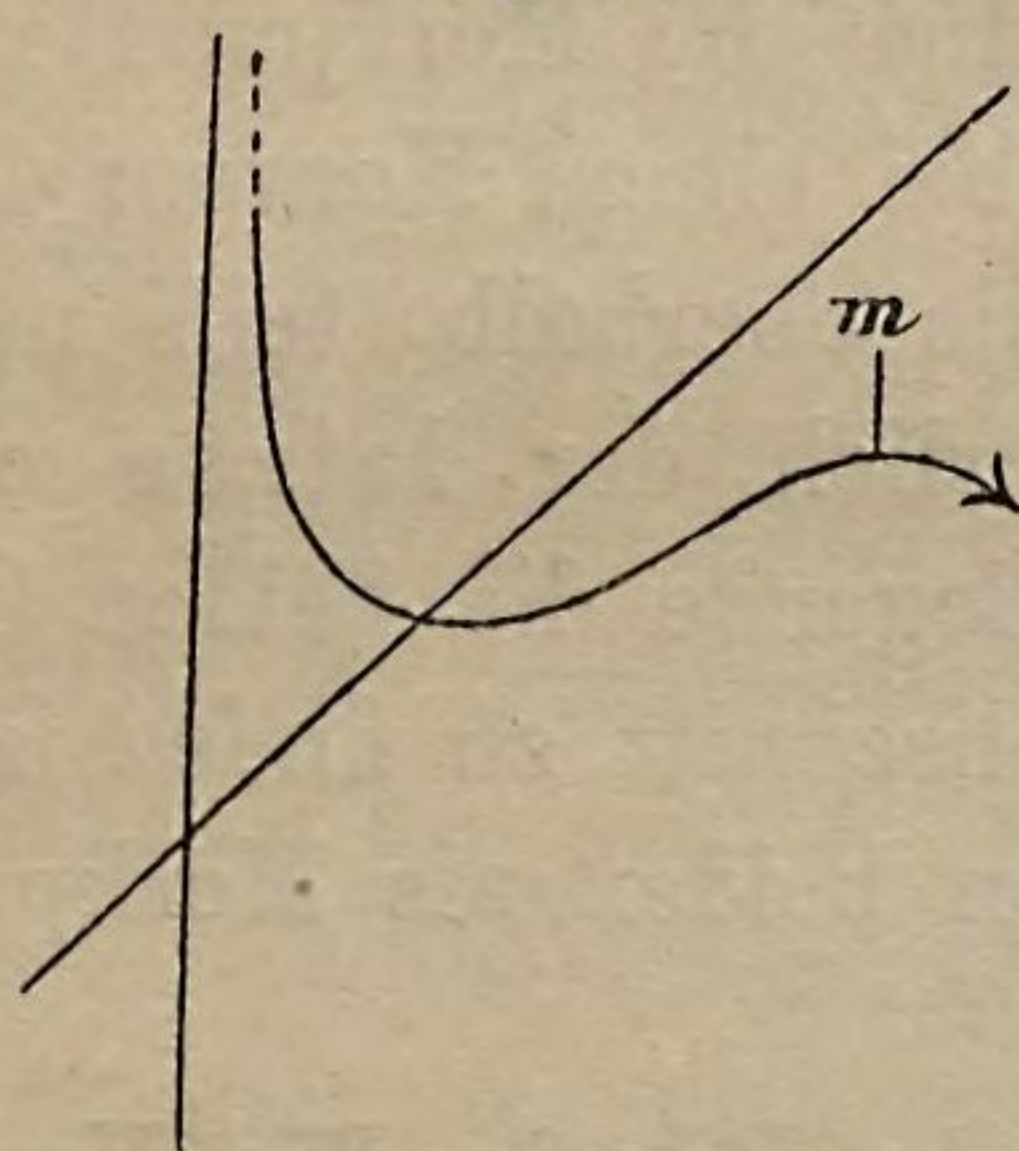
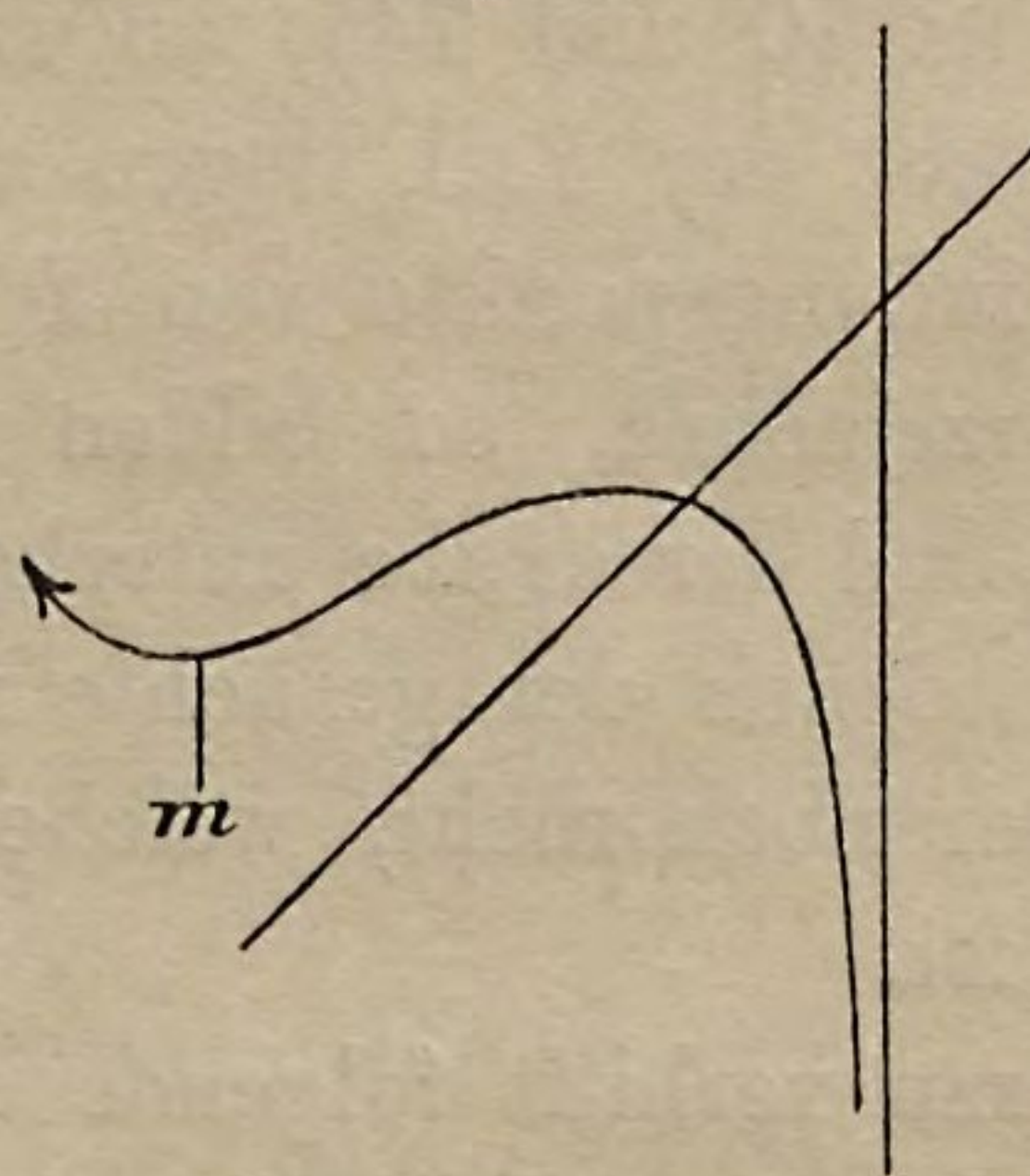


Fig. 74.



Betrachten wir zweitens einen Kurvenzweig, der irgendwo an eine Unstetigkeitsstelle angrenzt. — In diesem Falle kehrt sich das vorhin Gesagte an dieser Stelle um. Der unterste Verschwindungspunkt ist Merkpunkt, wenn er ein Maximum (Fig. 73), der oberste, wenn er ein Minimum ist (Fig. 74). In dem mittleren Verlaufe aber bleibt die Sache genau so, wie vorhin.

§ 63. Es läßt sich aber zur Bestimmung ganz derselben Merkpunkte noch ein anderes Verfahren anwenden.

Nach § 57 steht für jeden Kurvenzweig das Vorzeichen von F' fest. Wenn man nun für irgend einen Verschwindungspunkt von F'' bloß noch das Vorzeichen von F ermittelt, so ergibt sich, ob $\frac{F}{F'}$ positiv oder negativ oder gleich Null ist, und dann zeigt sich auf Grund der Gleichung $y = x - \frac{F}{F'}$ auch weiter, ob $y \gtrless x$. Hierdurch erhält man Gewißheit, ob jener Verschwindungspunkt unter, auf oder über der Wurzelachse liegt. — Liegt der Punkt auf der Wurzelachse, so ist er natürlich ein „Vorzugsmerkpunkt“ und erledigt den Zweig. In den beiden anderen Fällen heißt die einfache Regel: Gleiche Vorzeichen von F und F' legen jeden Kurvenpunkt unter, ungleiche legen ihn über die Wurzelachse.

Da nun jeder wurzeltragende Zweig über der Wurzelachse beginnt und unter derselben endet, so ersieht man sofort: Liegt der niedrigste Verschwindungspunkt von F'' schon unterhalb der Wurzelachse (Fig. 69 und 73), oder liegt der höchste Verschwindungspunkt noch oberhalb der Wurzelachse (Fig. 70 und 74), so sind dies die Merkpunkte. — Ist beides nicht der Fall, liegen also bei einem Kurvenzweige die Verschwindungspunkte von F'' teils oberhalb, teils unterhalb der Wurzelachse, so bilden natürlich der letzte oberhalb liegende und der erste unterhalb liegende die beiden Grenzen, zwischen denen der gesuchte Durchschnitt zu finden ist; man weiß aber noch nicht, welcher von beiden als Merkpunkt zu nehmen ist.

Hierzu verhilft folgende einfache Regel: Die Verschwindungspunkte von F'' seien von einem (beliebigen) Ende des Zweiges nach dem anderen Ende hin nummeriert. Dann haben auch die zwei in Frage kommenden Grenzen zwei aufeinander folgende Nummern, von denen die eine geradzahlig, die andere ungeradzahlig ist. Hat nun die Zählung bei einer Unstetigkeitsstelle begonnen, so trägt der Merkpunkt die ungerade Nummer, andernfalls die gerade.

Man braucht sich nur irgend einen Kurvenzweig zu zeichnen, bei dem die Verschwindungspunkte von F'' auf beiden Seiten der Wurzelachse liegen, um zu finden, daß man mit vorstehender Regel genau dieselben Merkpunkte trifft, welche im vorigen Paragraphen gekennzeichnet worden sind.

§ 64. Im Vorstehenden ist nunmehr je ein Merkpunkt bestimmt für sämtliche Kurvenzweige, auf denen sich Verschwindungspunkte von F'' befinden; es bleiben daher bloß noch solche Zweige zu betrachten, auf denen F'' nicht verschwindet. —

Aus dem Rolle'schen Satze folgt sofort, daß diese Zweige niemals zwischen zwei Unstetigkeitsstellen liegen können. Desgleichen kann ein von Anfang bis zu Ende ohne Unstetigkeit hinlaufender Zweig nicht ohne einen Verschwindungspunkt von F'' existieren. Denn ein solcher Zweig ist nur möglich, wenn die Gleichung $F = 0$ von ungeradem Grade ist. Dann aber ist die Gradzahl von F'' ebenfalls ungerade, woraus sich das Vorhandensein eines Verschwindungspunktes ergibt.

Wir haben es also bloß noch zu thun mit dem ersten Kurvenzweige, der aus dem negativ Unendlichen bis zur ersten Unstetigkeitsstelle geht, und dem letzten Kurvenzweige, der von der letzten Unstetigkeitsstelle ins positiv Unendliche läuft. Wenn diese Zweige eine reelle Wurzel besitzen, also die Wurzelachse schneiden, so gilt von ihnen, daß jeder beliebige Punkt derselben als Merkpunkt brauchbar ist. Sobald daher die verschiedenen Kurvenzweige durch die Verschwindungspunkte von F' von einander abgegrenzt sind, ist keine falsche Wahl mehr möglich.

Indessen lassen sich auf andere Weise auch noch für diese Zweige Merkpunkte finden, die ganz bestimmt sind, und deren Brauchbarkeit gesichert ist. Denn es gibt bekanntlich Mittel, um für die größte und kleinste reelle Wurzel einer Gleichung Grenzen aufzustellen. (Vgl. u. a. Serret I S. 199, Netto S. 201.) Solche sind z. B. $\pm (1 + a)$, wobei a den Betrag des absolut größten Koeffizienten bedeutet, der in der Funktion $F(x)$ vorkommt. Die beiden Punkte $x = \pm (1 + a)$ sind sonach ebenfalls als bestimmte Merkpunkte brauchbar.

§ 65. Zum Schlusse bleibt nun noch der Zweck und Nutzen der Merkpunkte für das Verfahren der Funktionswiederholung auseinanderzusetzen.

Wir beginnen mit dem zuletzt behandelten Falle, wo ein äußerer Kurvenzweig zwar einen Wurzelpunkt, aber keinen Verschwindungspunkt (ungerader „Multiplizität“) von F'' besitzt. — In Fig. 75 und 76 sei m der Merkpunkt, dessen Abscisse den Wert $-(1 + a)$ beziehungsweise $+(1 + a)$ hat.

Fig. 75.

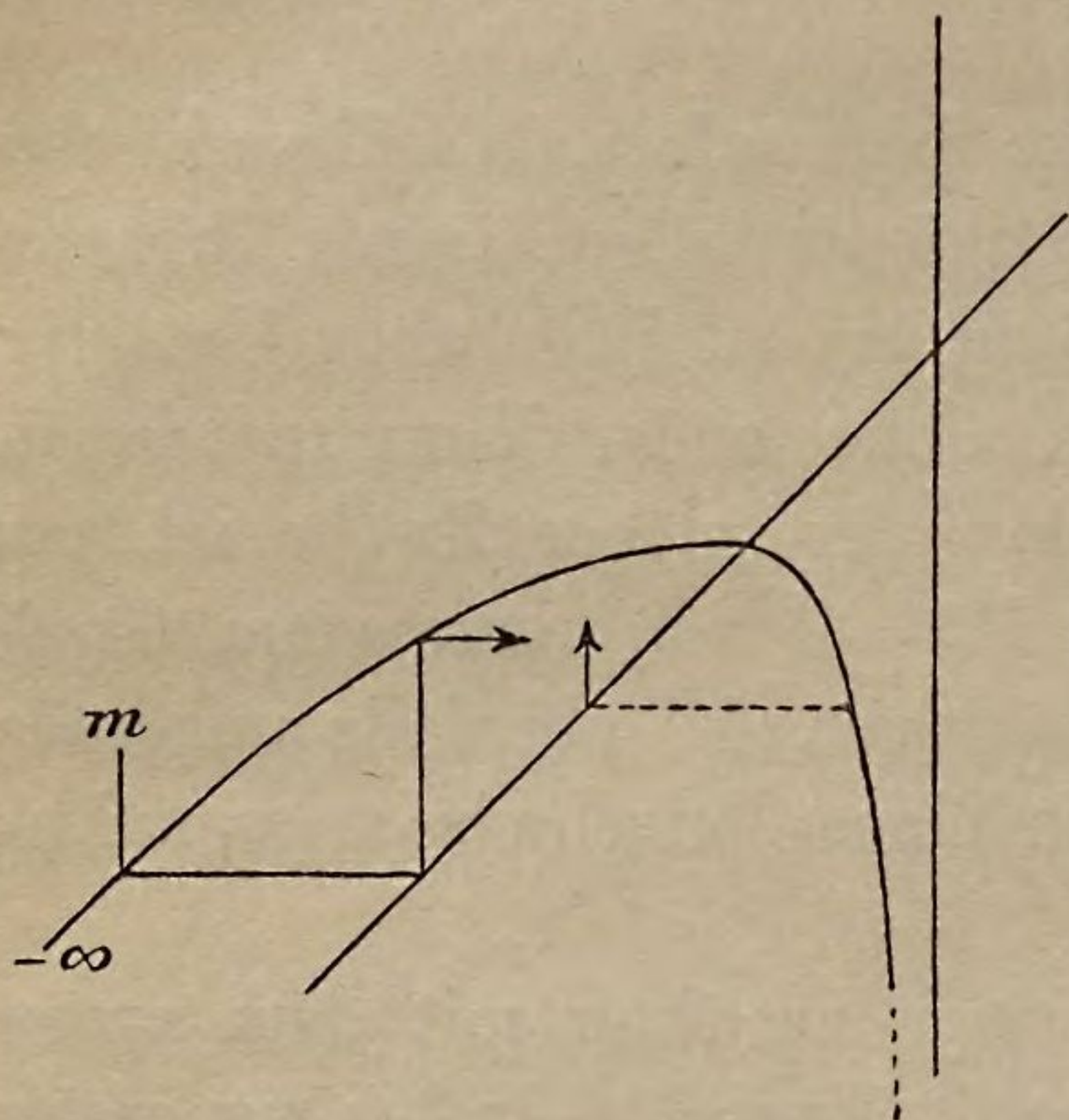
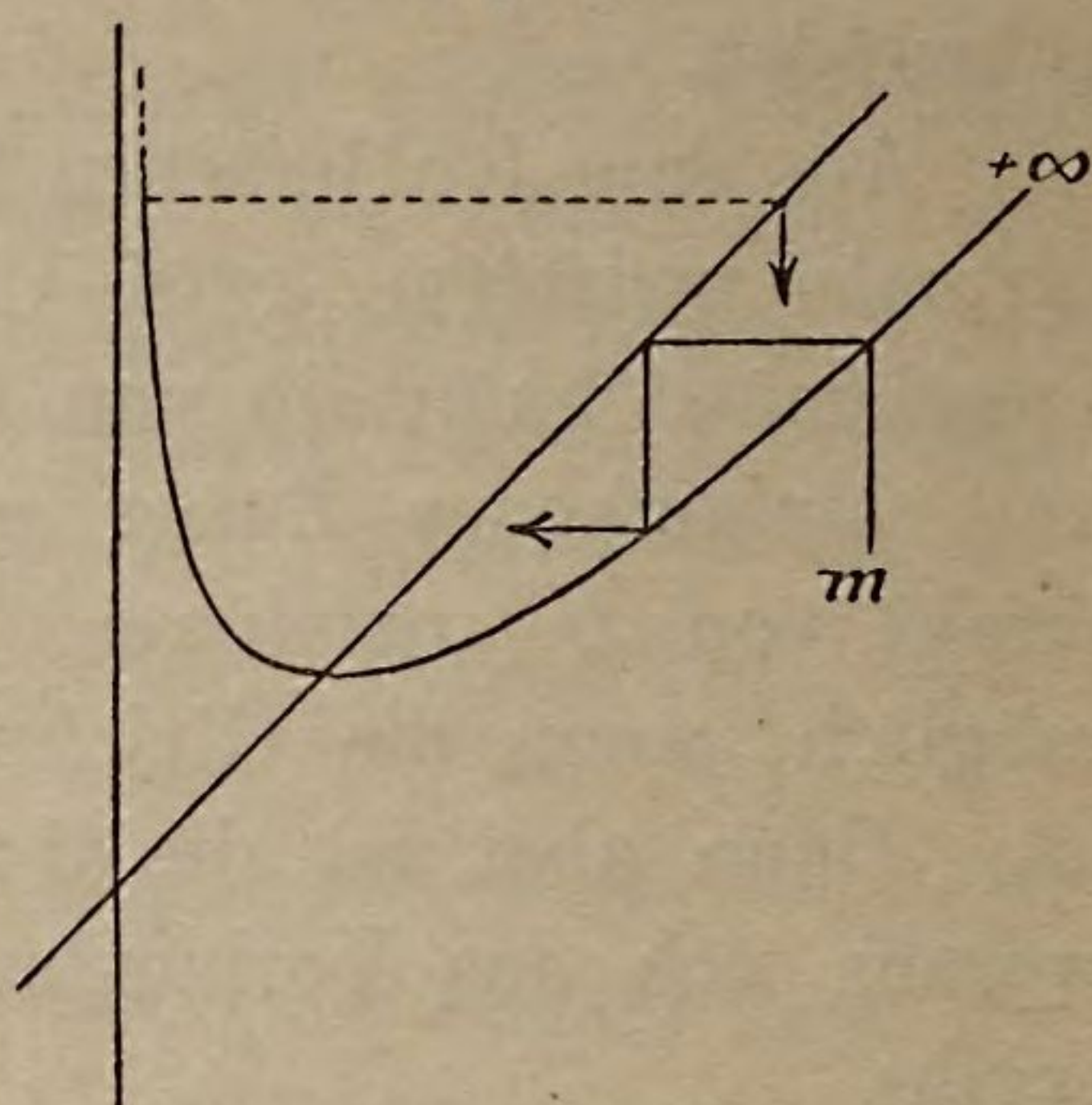


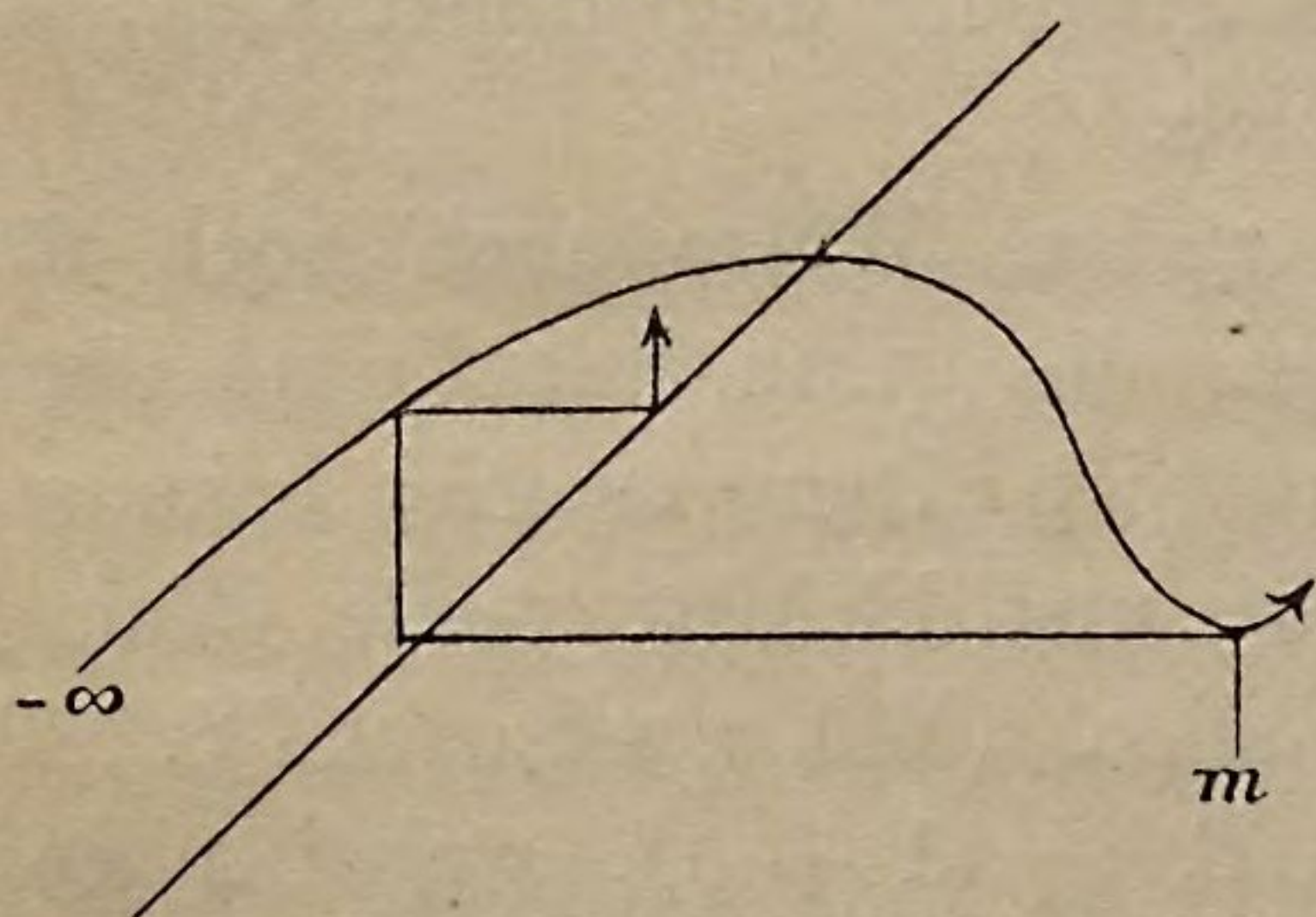
Fig. 76.



Wählen wir ihn zum Anfang der ersten Brücke, so ist deutlich zu sehen, wie eine centripetale, treppenförmig verlaufende Iteration sich daran anschließt.

Zweitens sei der Fall gewählt, wo der erste oder letzte Zweig der Kurve einen Wurzelpunkt und dazu als Merk-

Fig. 77.



punkt den ersten, bez. den letzten Verschwindungspunkt von F'' besitzt. Beginnen wir in Fig. 77 beim Merkpunkte m die erste Brücke, so ist die darauf folgende zweite Brücke der Anfang einer konvergenten Iterationstreppe. Fig. 77 zeigt dies für den untersten Zweig; kehren wir

sie um, so zeigt sie den Verlauf für den obersten Zweig. —

Hier ist eine Bemerkung einzuschalten über einen Satz,

den Herr Netto unter Berufung auf Tauber folgendermaßen ausspricht (S. 310): „Besitzt $f(z) = 0$ nur reelle Wurzeln, und sind u_1 und u_2 die äußersten reellen Wurzeln von $f'(z) = 0$, wobei $u_1 < u_2$ ist, so führt jeder Anfangswert des Newtonschen Algorithmus zwischen $-\infty$ und u_1 auf die kleinste, und jeder zwischen u_2 und $+\infty$ auf die größte Wurzel von $f = 0$.“

Dieser Satz ergibt sich aus der geometrischen Anschauung mit einem Blick, weil ja bei der vorausgesetzten Reellität aller Wurzeln die äußeren Kurvenzweige gar keine Verschwindungspunkte von f'' enthalten. Aber man erkennt auch, daß er zu eng gefaßt ist. Damit z. B. jeder zwischen $-\infty$ und u_1 gewählte Anfangswert die unterste reelle Wurzel liefere, ist gar nicht nötig, daß die Gleichung $f(z) = 0$ nur reelle Wurzeln besitze, vielmehr dürfen sich auch beliebig viele komplexe darunter befinden. Nötig hingegen ist, daß in dem Zwischenraume zwischen $-\infty$ und u_1 kein (ungerade zählender) Verschwindungspunkt von $f''(z)$ vorhanden sei, der höher liegt, als die unterste reelle Wurzel. Denn sobald dies der Fall, ist die Möglichkeit vorhanden

1) daß die Iteration gegen ein Quadrat konvergiere (Fig. 78),

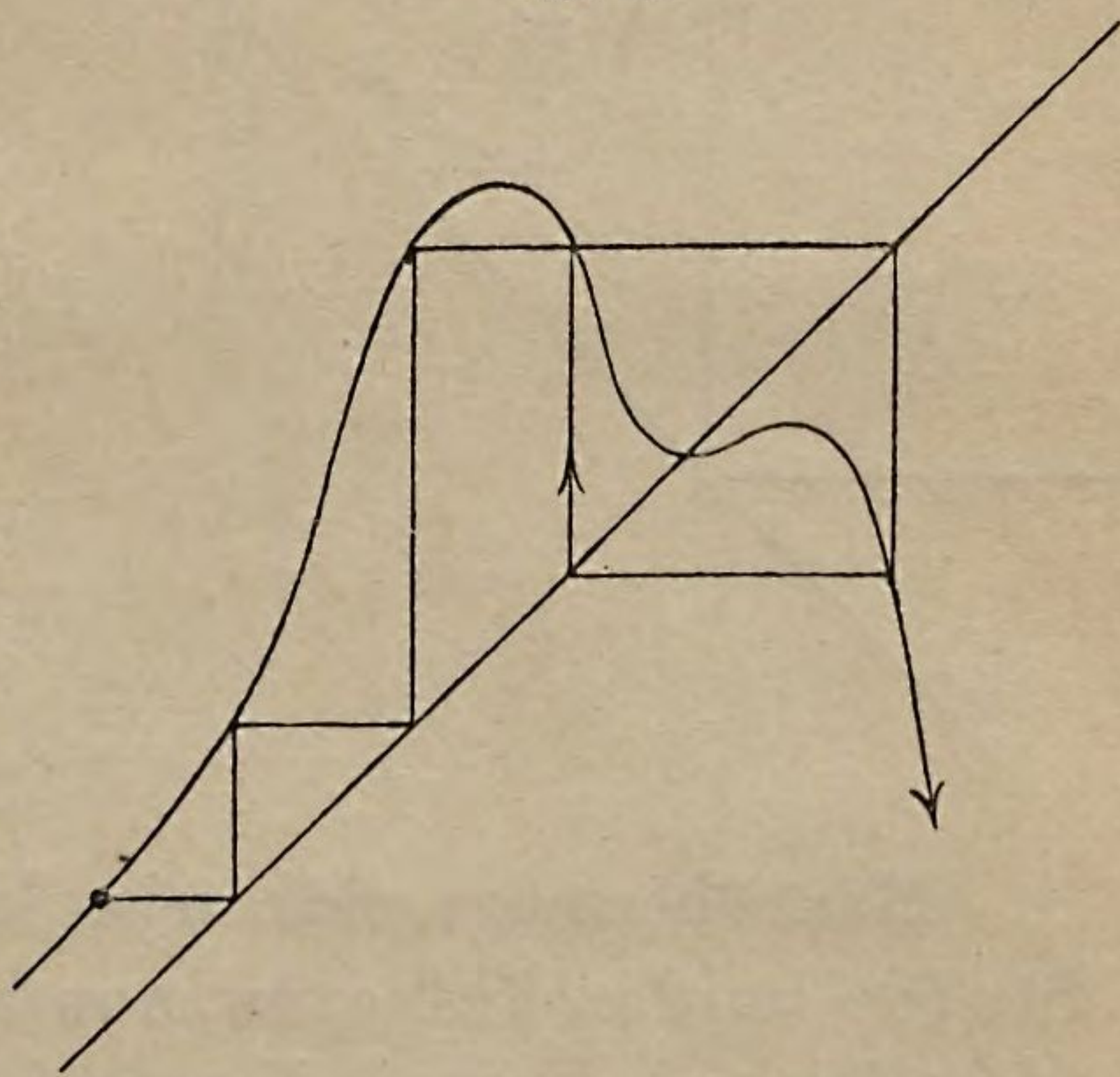
2) daß sie eine ganz andere Wurzel, vielleicht sogar die allerhöchste liefere (Fig. 79).

Gleicherweise konvergiert eine zwischen u_2 und $+\infty$ beginnende Iteration gegen die höchste Wurzel nur dann mit Sicherheit, wenn in diesem Zwischenraume kein

ungerade zählender Verschwindungspunkt von $f''(z)$ vorhanden ist, der tiefer als diese Wurzel liegt.

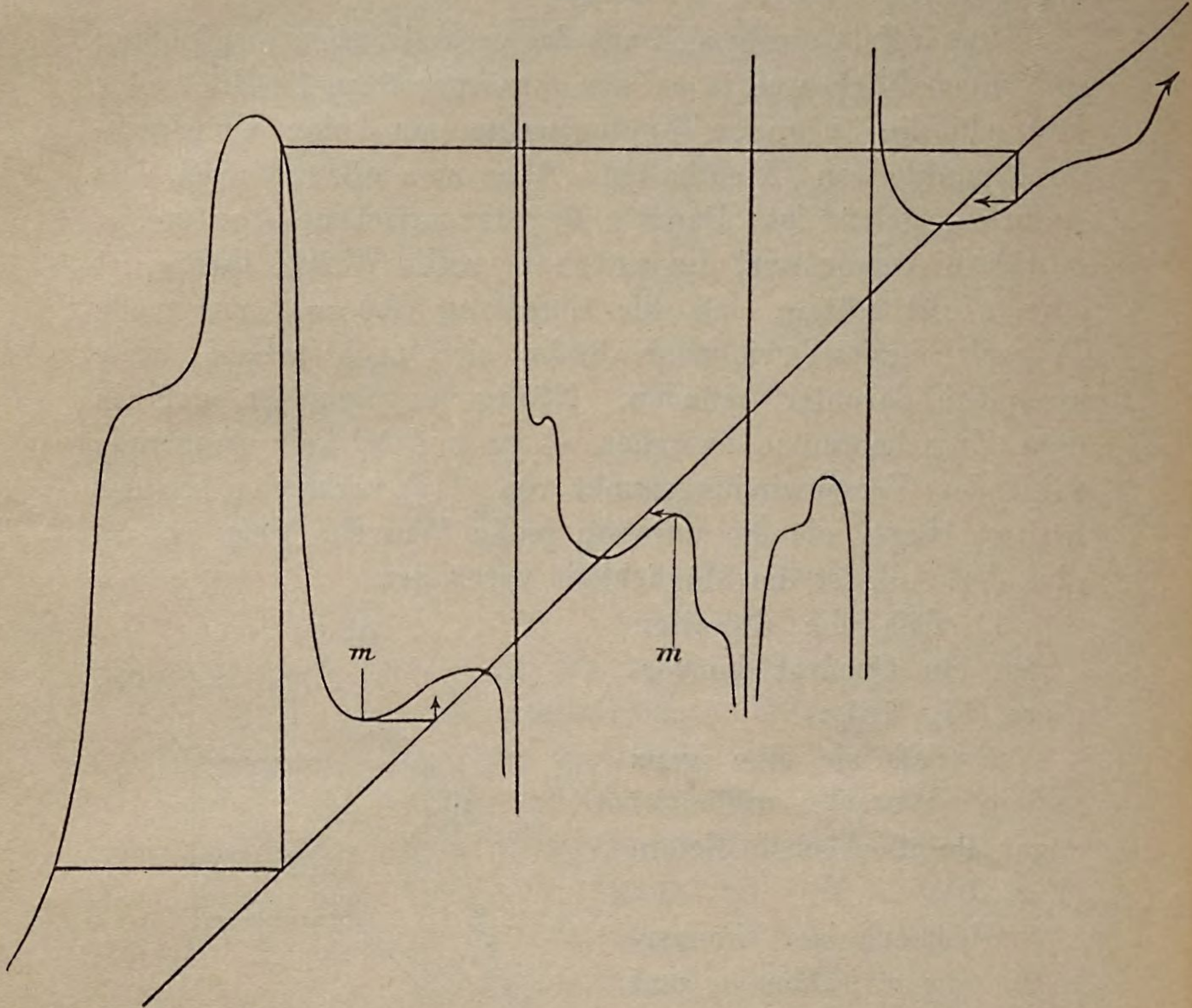
Die Untersuchung, ob solche hinderliche Verschwindungspunkte von $f''(z)$ vorhanden sind, ist möglich, aber völlig überflüssig, wenn man sich an die in den letzten Paragraphen

Fig. 78.



gekennzeichneten Merkpunkte hält. Jedesmal liefern diese — mögen die Verschwindungspunkte von $f''(z)$ so hoch oder tief liegen, wie sie wollen — einen durchaus zuverlässigen Anfang für eine Iteration, die mit voller Sicherheit zu der erstrebten Wurzel hinführt.

Fig. 79.



Man überzeugt sich sehr leicht, daß dies nicht bloß für die beiden äußeren, sondern auch für alle inneren, zwischen je zwei Unstetigkeitspunkten liegenden Kurvenzweige gilt.

Demnach bleibt kein Fall übrig, wo irgend eine reelle Wurzel einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades mit reellen Koeffizienten nicht von ganz bestimmten Anfangswerten aus durch eine zweifellos

konvergente Funktionswiederholung erhalten werden könnte.

Grenzeinschließungen sind durch § 55 gegeben.

§ 66. Um das Resultat nun auch noch in eine kurze Formel zu kleiden, so möge ξ irgend eine reelle Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$ sein, dann hat man:

$$\xi = \lim \varphi(\mu); \quad \varphi(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}; \quad F''(\mu) = 0.$$

Finden nicht alle reellen Werte von μ bei der Ermittlung der Werte von ξ Verwendung, so besteht über die Auswahl der brauchbaren keine Willkür und keine Unsicherheit (§ 63).

Reichen die reellen Werte von μ nicht aus zur Ermittlung aller Werte von ξ , so gilt für die zwei fehlenden:

$$\xi = \lim \varphi[\pm (1 + a)],$$

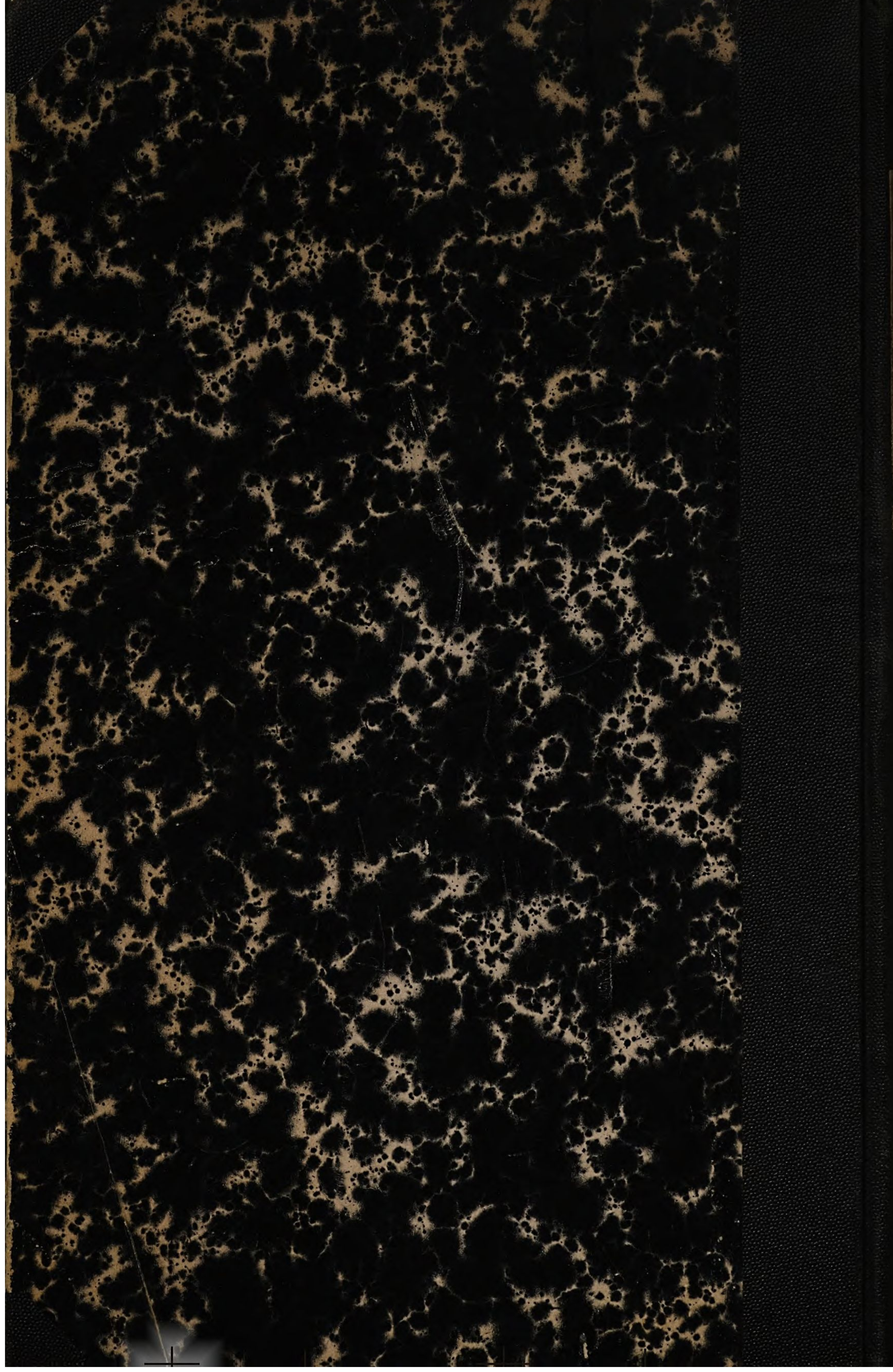
wobei a den Betrag des absolut größten in $F(x)$ vorkommenden Koeffizienten bedeutet.

Alle Gleichungen, deren Lösung bei dem Verfahren vorausgesetzt wird, sind von niederem Grade als die gegebene Gleichung.



Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	3
I. Geometrische Deutung der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten.	8
II. Brücken. Wurzelachse. Spiegelung	11
III. Brückenzickzack, Treppen, eckige Spiralen, centripetaler und centrifugaler Verlauf	16
IV. Die Funktionswiederholung in ihrer einfachsten Form, erste Bedingung ihrer Konvergenz, Erörterung der Grenzfälle . . .	21
V. Zweite Konvergenzbedingung. Ableitung von Grenzggleichungen	30
VI. Erste Anwendung des Verfahrens einfacher Funktionswieder- holung, Bruchketten, Lösung der Aufgabe, einen Kettenbruch von mehrgliedriger Periode in einen eingliedrig periodischen umzuwandeln	38
VII. Weitere Anwendungen, Potenz- und Wurzelketten	51
VIII. Entwicklung der reduzierten kubischen Gleichung in Wurzel- ketten. Trinomische Gleichungen	61
IX. Über die Lösung der Aufgabe, eine gegebene Funktion durch Wiederholung ihrer selbst umzukehren.	71
X. Umkehrung von Kreisfunktionen. Verschiedene Darstellungs- weisen der Zahl π durch Funktionswiederholung	75
XI. Umkehrung des Logarithmus und der Exponentialfunktion. Ausdrücke für die Basis e des natürlichen Logarithmensystems	79
XII. Beseitigung der ersten Konvergenzgrenze durch zweckmäßig angepafste Näherungswerte	85
XIII. Aufhebung der Konvergenzgrenze durch Umgestaltung der Kurve	94
XIV. Über die Kurve $y = x - \frac{F}{F'} = \varphi$ und deren Verwendbarkeit zur Zurückführung einer Gleichung beliebigen Grades auf Gleichungen von niedrigerem Grade	98



Isenkrahe, Caspar,

Das Verfahren der Funktionswiederholung, seine geometrische
Veranschaulichung und algebraische Anwendung

Leipzig 1897

Math.p. 244 dp

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11815271-4